

Begleittext zu den Vorlesungen Photonik

	Seite
1. Einleitung , Frequenz und Intensität Licht, Maxwell-Gleichungen, Brechungsindex	2
2. Lichtbrechung , Lichtbrechung, Prismen, Dispersion	4
3. Polarisation Licht , Doppelbrechung, optische Modulatoren, Flüssigkristallanzeigen	8
4. Reflexion und Transmission an Grenzflächen , Fresnel'sche Gleichungen	16
5. Überlagerung von Wellen , Kohärenz, Verspiegelung, Entspiegelung	21
6. Interferometrie , Interferenz, Interferometer	24
7. Lichtbeugung , Spaltbeugung, Auflösung optischer Instrumente, Beugung am Gitter	26
8. Sphärische Linsen , Linsengleichung, Seidel'sche und chromatische Aberrationen	30
9. Optische Systeme , Aperturblenden, Lupe, Mikroskop, Fernrohr, Telezentrie, Autofokus	37
10. Literaturangaben (Stand 2008)	42

Einleitung

Die elektromagnetische Strahlung ist mit Abstand die bedeutendste Sonde zur Darstellung der äußeren - und in Form der Röntgenstrahlung - auch der inneren Struktur von Körpern. Im täglichen Gebrauch nehmen dabei das sichtbare Licht und angrenzende Wellenlängenbereiche für die Mikro- und Feinwerktechnik eine Sonderstellung ein, da in diesem Wellenlängenbereich optische Geräte unentbehrliche Hilfsmittel für die Meßtechnik darstellen. Lithographische Verfahren nutzen Licht für die Herstellung von Mikrostrukturen und in jüngster Zeit erlangte die elektromagnetische Strahlung höchste Bedeutung für die Kommunikationstechnik.

Allerdings ergeben sich aufgrund der Welleneigenschaften und der Wechselwirkung des Lichts mit Materie gerade für die Mikro- und Feinwerktechnik Einschränkungen in der Anwendung. Beispielsweise reicht die Meßgenauigkeit konventioneller Geräte bei der Vermessung von Strukturabmessungen im Mikrometerbereich (Arbeitsbereich eines Mikrotechnikers) häufig nicht mehr aus. Aufgrund des Phänomens der Beugung ist gleichermaßen die lithographische Strukturierung im Submikrometerbereich nur schwer realisierbar. In der Kommunikationstechnik ist die Lichtausbreitung durch unerwünschte Absorption in Polymer- oder Glasfasern eingeschränkt.

Beim Umgang mit optischen Geräten ist es somit für einen Mikro- und Feinwerktechniker unerlässlich, deren Grenzen gut zu kennen. Schließlich werden weltweit in der Faseroptik und integrierten Optik erhebliche Anstrengungen zur Entwicklung und Fertigung neuer Produkte unternommen, wobei Methoden der Mikro- und Feinwerktechnik einen großen Stellenwert einnehmen.

Grundzüge der Technischen Optik

1. Grundbegriffe

Elektromagnetische Strahlung breitet sich im Vakuum mit der Lichtgeschwindigkeit $c_0 = 2,998 \cdot 10^8$ m/s aus und braucht 3,3 ns für das Durchlaufen einer Strecke von 1 m. Sichtbares Licht umfaßt im elektromagnetischen Strahlungsspektrum den Wellenlängenbereich 400-800 nm (vgl. Abb. 1.1). Dies entspricht einem Frequenzbereich von 750 THz bis 375 THz.

Zwischen der Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 , der Wellenlänge λ_0 im Vakuum und der Frequenz f des Lichts besteht die Beziehung:

$$c_0 = \lambda_0 f \quad (1)$$

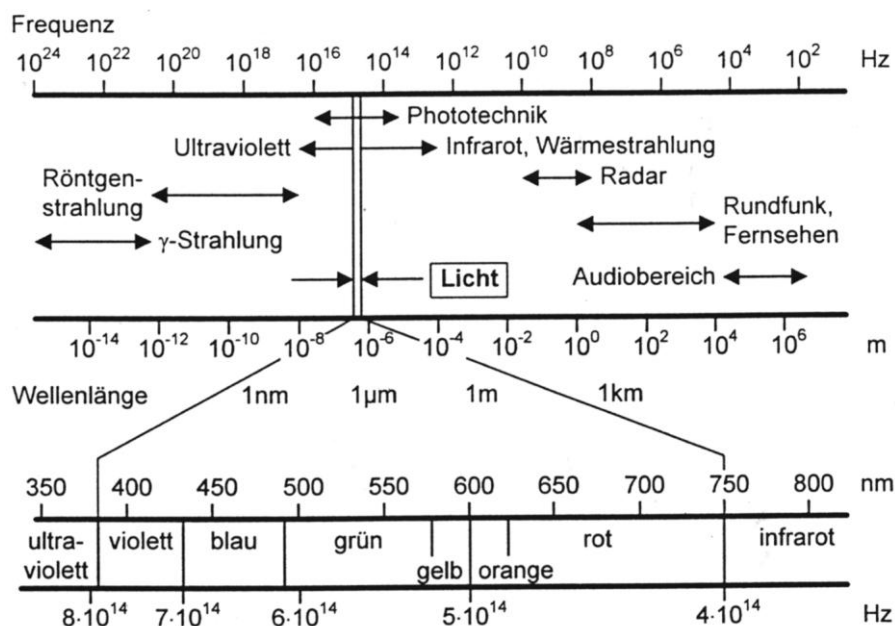


Abb. 1.1: Übersicht elektromagnetisches Spektrum

Elektromagnetische Strahlung läßt sich durch die Feldvektoren $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$, bzw. $\mathbf{B}$ charakterisieren. Sie sind über die Maxwell'schen Gleichungen miteinander verknüpft:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \quad \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

Ausschließlich für den Gebrauch in Vorlesungen und Übungen !

Hieraus lassen sich Wellengleichungen für die Vektoren $\mathbf{E}$ sowie $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ herleiten. In nicht leitenden und nicht magnetisierbaren Medien (freier Raum) gilt:

$$\Delta \mathbf{E} = 1/v^2 \partial^2 / \partial t^2 \mathbf{E} \quad \Delta \mathbf{B} = 1/v^2 \partial^2 / \partial t^2 \mathbf{B} \quad (4)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit v (Phasengeschwindigkeit) der elektromagnetischen Welle ist im freien Raum: $c_0 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}$. Bei einem homogenen, isotropen Medium gilt allgemein: $v = 1/(\epsilon \mu)^{1/2} = c_0/n$.

Die Wellengleichungen erlauben eine Reihe verschiedener Lösungen (Kugel-, Zylinder-, ebene Wellen...) zur Beschreibung des zeitlichen und räumlichen Verhaltens der Vektoren $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$. Hierbei stehen $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ immer senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Man spricht deshalb von Transversalwellen. Um die folgende Betrachtungsweise zu vereinfachen, soll sich die elektromagnetische Welle nur in x -Richtung ausbreiten (Abb. 1.2), d. h. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x,t)$ und nur eine Komponente besitzen. Man spricht dann von einer ebenen, monochromatischen, polarisierten Welle, die sich darstellt als

$$E_y(x,t) = E_0 \cos(\omega x/v - \omega t) \quad (5)$$

In häufig gebräuchter Schreibweise mit $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$ folgt: $E_y(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t)$. $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ stehen dabei senkrecht aufeinander.

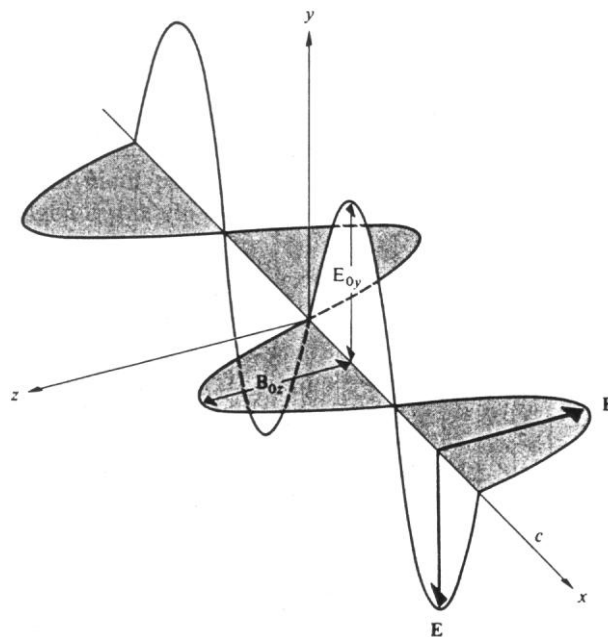


Abb.: 1.2 Orthogonale, harmonische E- und B-Felder

Intensität des Lichts

Die Wellengleichungen beschreiben das zeitliche und räumliche Verhalten der elektrischen und magnetischen Felder. Diese Größen sind aber einer direkten Messung nicht zugänglich ($f \approx 5 \cdot 10^{14}$ Hz !). Messen lassen sich zeitlich gemittelte Größen, z. B. der Energieübertrag durch die mit $F_e = q E(t)$ schwingenden Elektronen. Die Kraftwirkung des Magnetfeldes ist wegen $F_m = q v B(t)$ und wegen der im Festkörper langsamen Elektronen ($v \ll c$) vernachlässigbar, so daß zur Festlegung der mittleren Lichtintensität an einem festen Ort die elektrische Feldstärke (eigentlich Energiestromdichte) dient.

$$I = \langle E^2 \rangle = \epsilon c E_0^2 \langle \sin^2(\omega t + \varphi_0) \rangle \quad (6)$$

Die eckigen Klammern bedeuten, daß hierbei der zeitliche Mittelwert zu nehmen ist.

Brechungsindex

In einem Stoff mit dem Brechungsindex n ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit v des Lichts **niedriger** als im Vakuum ($n > 1$).

$$v = c_0/n \quad (7)$$

Unabhängig vom Stoff, in dem sich das Licht ausbreitet, bleibt jedoch die Frequenz f des Lichts **gleich**. In den Medien 1 und 2 lassen sich die Ausbreitungsgeschwindigkeiten v_1 und v_2 schreiben:

$$v_1 = \lambda_1 f \quad v_2 = \lambda_2 f \quad (8)$$

mit Ausdruck (7) und den Brechungsindizes n_1 und n_2 folgt:

$$n_1 \lambda_1 = n_2 \lambda_2$$

Ist das Medium 1 mit dem Brechungsindex n_1 "optisch dichter" als das Medium 2 mit dem Brechungsindex n_2 , d. h. $n_1 > n_2$, so ist die Wellenlänge im Medium 1: $\lambda_1 = \lambda_2 n_2/n_1$.

Beispiel: Die Wellenlänge des HeNe-Lasers beträgt in Luft 633 nm (rotes Licht), der Brechungsindex ist nahezu 1. In Glas (typischer Brechungsindex 1,5) wird die Wellenlänge auf 422 nm reduziert.

Optischer Weg: Durchläuft ein Lichtstrahl mehrere Schichten mit den Dicken $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$, so braucht er hierzu die Zeit

$$\Sigma t_i = \Sigma d_i/v_i = 1/c_0 \Sigma d_i n_i \quad (9)$$

Man sagt auch, der Lichtstrahl legt den "optischen Weg" $\Sigma d_i n_i$ zurück.

Die Wellenfronten, das sind Stellen mit gleicher Amplitude, weisen im optisch dichteren Medium einen kürzeren Abstand auf (vgl. Abb. 1.3). Die Abfolge der Wellenfronten entsteht dadurch, daß sich an **jedem** Punkt einer Wellenfront wieder eine Lichtwelle ausbreitet. Betrachtet man nach gleichen Zeitabständen die Überlagerung aller Lichtwellen, so erhält man den Ort der neuen Wellenfront (Prinzip von Huygens). Die Ausbreitungsrichtung des Lichts ist die Normale zur Wellenfront.

Brechungsindex einiger Stoffe	
Medium	n
Luft	1,000293
Wasser	1,3333
Alkohol	1,36
Quarz	1,46
Plexiglas	1,49
Glas	1,45 - 1,8
Diamant	2,4

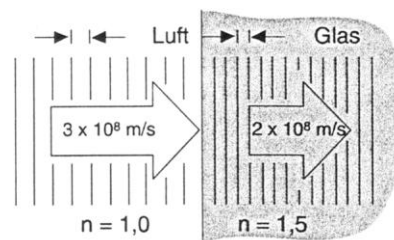


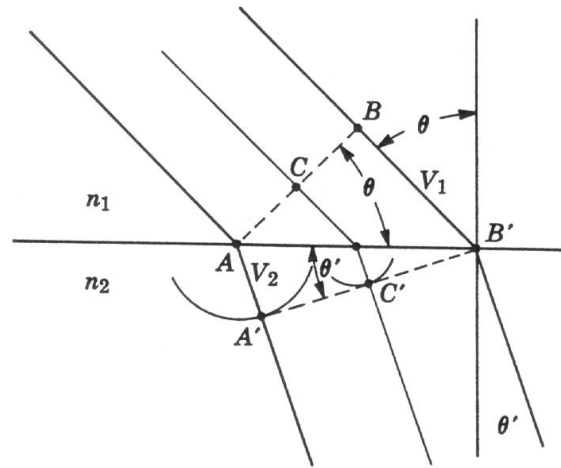
Abb. 1.3 Wellenfortpflanzung in Luft und Glas

2. Lichtbrechung

Erfolgt bei dem Eintritt des Lichts in ein anderes Medium ein Wechsel des Brechungsindex, so ändert sich die Ausbreitungsrichtung des Lichts (Lichtbrechung, engl.: refraction). Unter Nutzung des Huygens'schen Prinzips läßt sich das Brechungsgesetz ableiten (vgl. Abb. 2.1).

An der Grenzfläche zweier Medien mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 trifft Licht unter dem Winkel θ zur Grenzflächennormalen auf. Während sich die Welle im Medium 1 mit der Geschwindigkeit v_1 von B nach B' bewegt, breitet sich im Medium 2 eine Welle von A nach A' mit v_2 aus, wobei die Ausbreitungsrichtung im Medium 2 den Winkel θ' zur Grenzflächennormalen annimmt. Für die Strecken AA' und BB' gilt:

$$AA' = v_2 t \quad BB' = v_1 t \quad (1)$$

Abb. 2.1 Lichtbrechung an Grenzfläche mit Brechungsindizes n_1, n_2

Wegen $v_1/v_2 = n_2/n_1$ folgt:

$$BB'/AA' = v_1/v_2 = n_2/n_1 \quad (2)$$

Aus den geometrischen Beziehungen $\sin \theta = BB'/AB'$ und $\sin \theta' = AA'/AB'$ folgt $\sin \theta / \sin \theta' = BB'/AA'$. Mit Ausdruck (2) ergibt sich hieraus das Brechungsgesetz von Snellius:

$$\sin \theta / \sin \theta' = n_2/n_1 \quad (3)$$

Beim Eintritt in das optisch dichtere Medium wird der Lichtstrahl zum Lot hin gebrochen.

Falls jedoch Licht aus dem optisch dichteren in das optisch dünnere Medium eintritt, wird es vom Lot weg gebrochen (Abb. 2.2, Strahlengang A - A'). Vergrößert man den Winkel ε in Abb. 2.2, so tritt der Fall ein, daß der austretende Strahl parallel zur Grenzfläche verläuft und bei noch größerem Winkel ε reflektiert wird. Für den Grenzwinkel der Totalreflektion ε_G , mit $\varepsilon' = 90^\circ$, gilt wegen (3):

$$\sin \varepsilon_G = n_1/n_2 \quad (4)$$

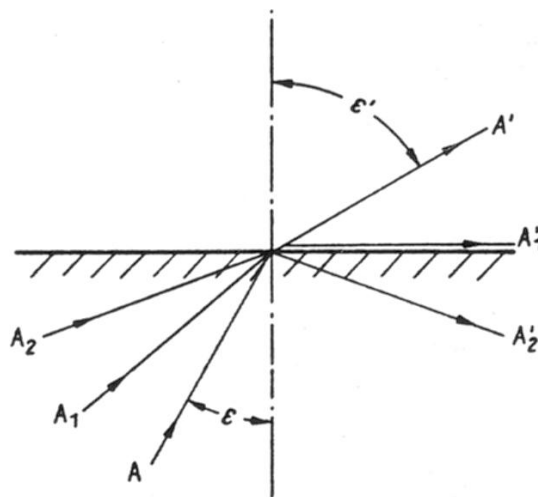


Abb. 2.2: Brechung von Lichtstrahlen aus dem optisch dichteren Medium

Ist Luft das optisch dünnere Medium ($n_1=1$) und Wasser ($n_2=1,33$), bzw. Glas ($n_2 = 1,5$), das optisch dichtere Medium, folgt als Grenzwinkel der Totalreflektion bei Wasser: $\varepsilon_G = 48,75^\circ$ und bei Glas $\varepsilon_G = 41,8^\circ$. Anwendung findet die Totalreflexion z. B. bei der Wasserstandsanzeige (Abb. 2.3), in Ablenkprismen (siehe unten), insbesondere aber in der Faseroptik.

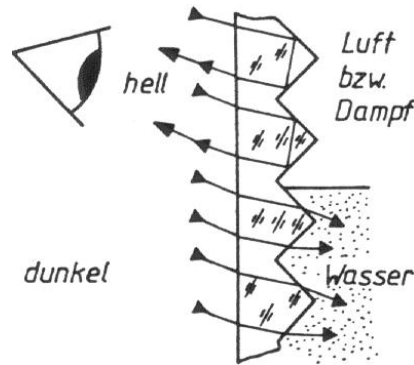


Abb. 2.3: Aufhebung Totalreflexion durch Wasser; der Bereich erscheint dunkel

Planparallele Platte

Die Lichtbrechung ist von grundlegender Bedeutung bei der Strahlablenkung von Licht. Fällt ein Lichtstrahl aus der Luft unter dem Winkel i zur Normalen auf eine planparallele Platte der Dicke d mit dem Brechungsindex n , so erfährt der Strahl einen Parallelversatz p (vgl. Abb. 2.4), für den gilt (vgl. z. B. [1]):

$$p = d \sin i [1 - \cos i / (n^2 - \sin^2 i)^{1/2}] \quad (5)$$

Für kleine Einfallswinkel ($i \rightarrow 0$) folgt deshalb: $p = d i [(n - 1)/n]$, d. h. der Parallelversatz des Lichtstrahls ist proportional zur Plattendicke und zum Einfallswinkel.

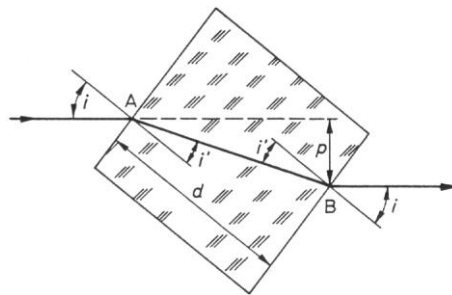


Abb. 2.4: Parallelversatz von Lichtstrahlen durch eine planparallele Platte

Prismen

Prisma: transparenter Körper, der durch zwei gegeneinander geneigte Flächen begrenzt wird. Brechende Kante: Gerade, in der sich diese Flächen schneiden. Variiert man den Einfallswinkel i_1 , unter dem der Lichtstrahl auf ein Prisma trifft, so tritt dann ein Minimum des Ablenkungswinkels δ auf, wenn der Austrittswinkel i_2 gleich dem Eintrittswinkel i_1 wird (Abb. 2.5 und 2.6). Auch symmetrischer Strahlengang, da der Lichtweg im Prisma senkrecht zur Winkelhalbierenden des Kantenwinkels steht.

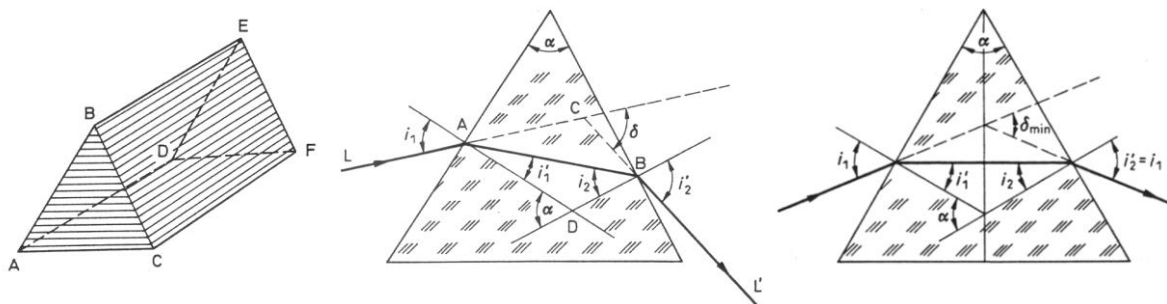


Abb. 2.5: Prismenkörper und Strahlenverläufe

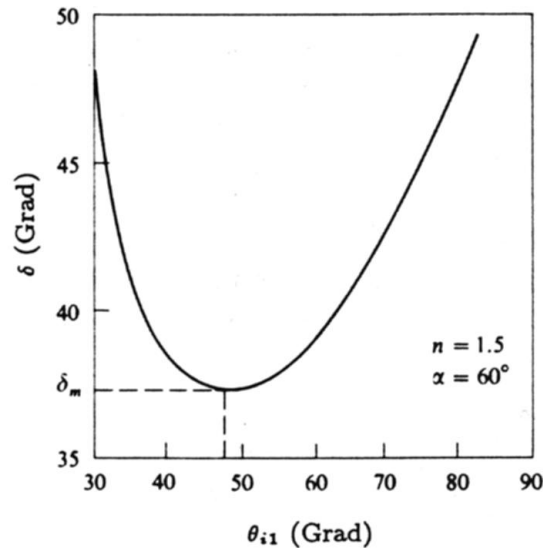


Abb. 2.6: Ablenkungs- gegen Einfallswinkel beim Prisma

Für symmetrischen Durchgang des Lichts, d. h. $\delta = \delta_m$, gilt:

$$n \sin \alpha/2 = \sin [(\delta_m + \alpha)/2] \quad (6)$$

Diese Beziehung, aufgelöst nach dem Brechungsindex n , dient zur präzisen meßtechnischen Bestimmung von n . Häufig werden dabei Hohlprismen eingesetzt (Flüssigkeiten, Gase). Da sich der Brechungsindex n der Materialien mit der Wellenlänge ändert, d. h. Dispersion auftritt, kann man hiermit $n = n(\lambda)$ bestimmen.

Dispersion

Abb. 2.7 zeigt die Brechungsindizes verschiedener technisch wichtiger Glassorten als Funktion der Wellenlänge. Bei allen Gläsern ist der Brechungsindex für kurzwelliges Licht (blau) größer als für langwelliges Licht (rot), so daß blaues Licht von Prismen stärker als rotes Licht abgelenkt wird.

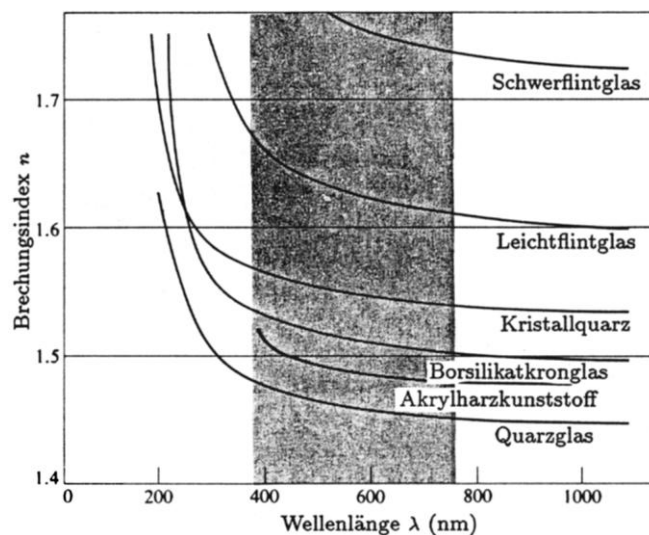


Abb. 2.7: Wellenabhängigkeit des Brechungsindex für verschiedene Materialien

Außer zur spektralen Zerlegung des Lichts dienen Prismen zur Richtungsänderung des Lichts und zur Bildumkehr. Dispersion ist dabei unerwünscht, so daß die Lichtstrahlen meist senkrecht auf die Prismenflächen fallen. Um unerwünschte Verluste zu vermeiden, sind die Reflexionsflächen häufig zusätzlich verspiegelt. Im rechtwinkligen Prisma (Abb. 2.8) wird der Lichtstrahl durch Totalreflexion um 90° abgelenkt. Die Wirkung ist wie bei einem Spiegel, d. h. das Bild ist seitenvertauscht. Im Porro-Prisma (Abb. 2.9) tritt 2-malige Reflexion an einer Grenzfläche auf. Der Lichtstrahl wird um 180° abgelenkt, das Bild ist um 180° gedreht. Das Penta-Prisma (Abb. 2.10) lenkt den Lichtstrahl um 90° ab, wobei die Bildorientierung beibehalten wird.

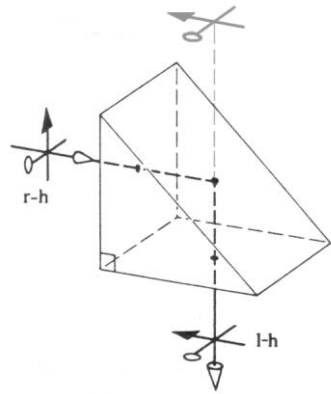


Abb. 2.8: Das rechtwinklige Prisma (links)

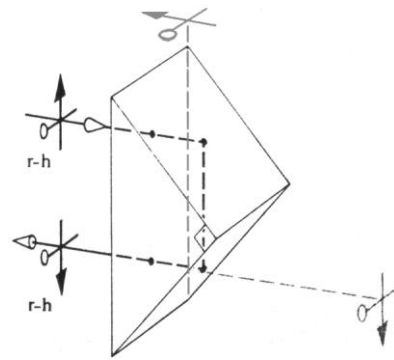


Abb. 2.9: Das Porro-Prisma (rechts)

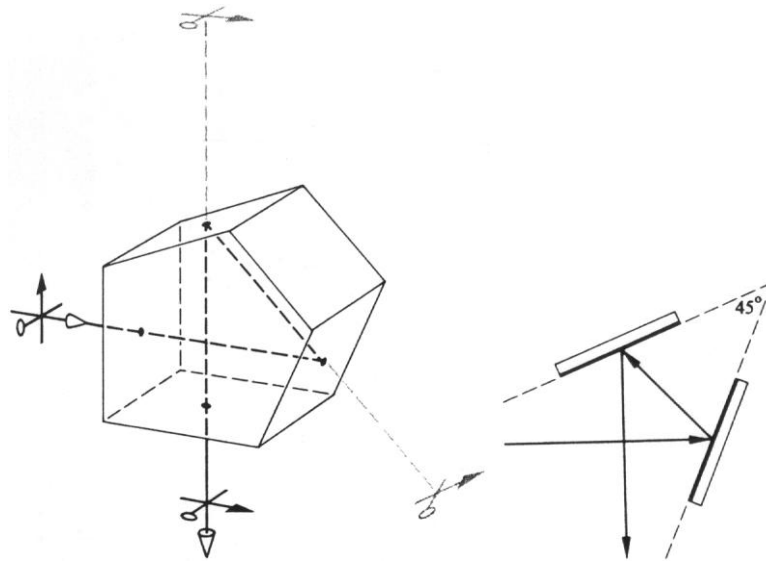


Abb. 2.10: Das Pentagonprisma und der dazu äquivalente Umlenkspiegel

3. Polarisation

Bisher blieb der elektrische Feldvektor $\mathbf{E}$ in **einer** Ebene. Man spricht dann von einer linear polarisierten Welle. Betrachtet werden nun zwei orthogonal zueinander stehende Feldvektoren:

$$\mathbf{E}_x(z,t) = \mathbf{i} E_{0x} \cos(kz - \omega t) \quad (1)$$

$$\mathbf{E}_y(z,t) = \mathbf{j} E_{0y} \cos(kz - \omega t + \Delta\phi) \quad (2)$$

Fallunterscheidung:

i) $\Delta\phi = 0$ oder vielfaches von 2π , dann sind die beiden Wellen in Phase (Abb. 3.1):

$$\mathbf{E}(z,t) = (\mathbf{i} E_{0x} + \mathbf{j} E_{0y}) \cos(kz - \omega t) \quad (3)$$

Die resultierende Welle ist wieder eine linear polarisierte Welle mit der Amplitude $(\mathbf{i} E_{0x} + \mathbf{j} E_{0y})$. Anmerkung: Dieser Prozeß läßt sich umdrehen, d. h. eine linear polarisierte Welle läßt sich in zwei orthogonal zueinander stehende Wellen zerlegen.

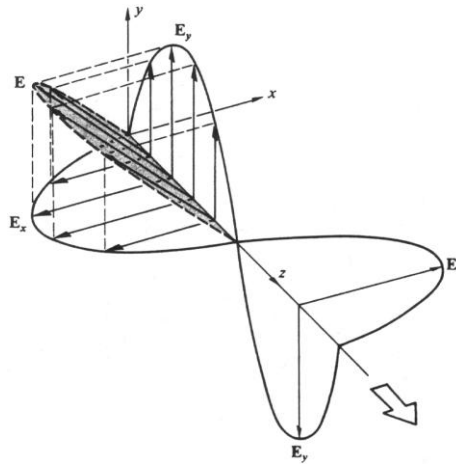


Abb. 3.1: Linear polarisiertes Licht

ii) Spezialfall gleiche Amplituden, $E_{0x} = E_{0y} = E_0$, Phasendifferenz $\Delta\phi = -\pi/2 + 2m\pi$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$E_x(z,t) = \mathbf{i} E_0 \cos(kz - \omega t)$$

$$E_y(z,t) = \mathbf{j} E_0 \sin(kz - \omega t)$$

Die Resultierende ist: $\mathbf{E}(z,t) = E_0 [\mathbf{i} \cos(kz - \omega t) + \mathbf{j} \sin(kz - \omega t)]$ (4)

Der skalare Wert des Feldvektors bleibt konstant. Der resultierende Vektor rotiert jedoch in Uhrzeigerrichtung um die z-Achse (Abb. 3.2). Es handelt sich um eine rechtszirkular polarisierte Welle.

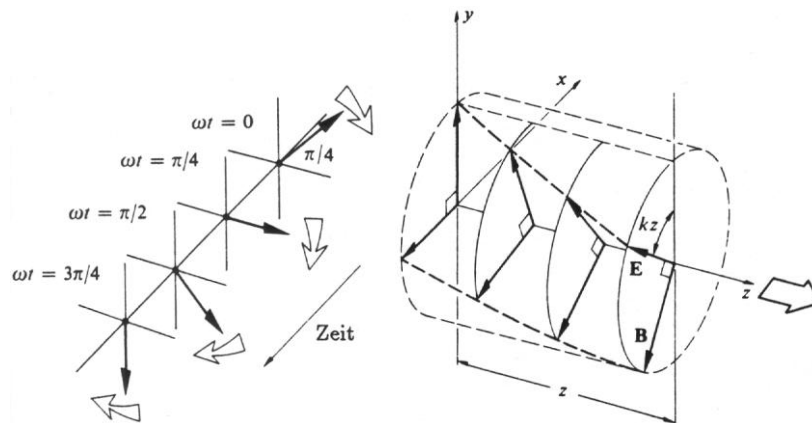


Abb. 3.2: Drehung des elektrischen Vektors in einer rechts zirkular polarisierten Welle und rechtszirkulares Licht

Bei der Phasendifferenz $\Delta\phi = +\pi/2 + 2m\pi$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, resultiert eine linkszirkular polarisierte Welle.

iii) Bei ungleichen Amplituden E_{0x} , E_{0y} erhält man elliptische Polarisation, d. h. der E-Vektor rotiert in oder entgegen den Uhrzeigersinn, wobei seine Spitze eine Ellipse beschreibt.

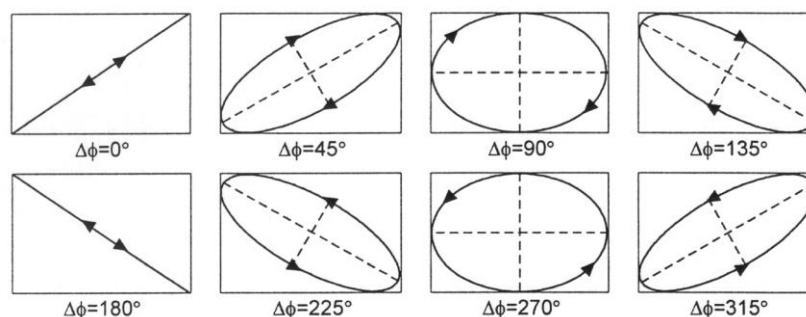
Abb. 3.3: Polarisationszustände bei $E_y/E_x = 2/3$

Abb. 3.3 veranschaulicht nochmals für $E_y/E_x = 2/3$ und verschiedene Phasendifferenzen die Bewegungsrichtungen der Spitze des elektrischen Feldvektors.

Ausschließlich für den Gebrauch in Vorlesungen und Übungen !

“Normales” Licht schwingt unpolarisiert, d. h. die Feldvektoren $\mathbf{E}_{0x}$ und $\mathbf{E}_{0y}$ schwingen mit statistisch verteilter Phase zueinander.

Polarisation und Polarisationsanalyse

Wie wird polarisiertes Licht erzeugt? Wie läßt sich der Polarisationszustand nachweisen? Schematisch ist dies in Abb. 3.4 dargestellt. Natürliches Licht mit gleichverteilten Polarisationszuständen trifft auf einen Polarisator, der Licht nur in einer Schwingungsebene hindurchläßt. Ein zweiter Polarisator, der um die z-Achse drehbar ist, läßt nur die Projektion des Amplitudenanteils durch, der seiner ausgezeichneten Richtung entspricht. Das Licht tritt ungeschwächt hindurch, wenn Polarisator und Analysator gleiche Drehung aufweisen. Im vorliegenden Fall (Abb. 3.4) wird aber nur der Amplitudenanteil $E \cos \theta$ durchgelassen. Der Detektor weist Intensitäten nach. Gemessen wird daher

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad (5)$$

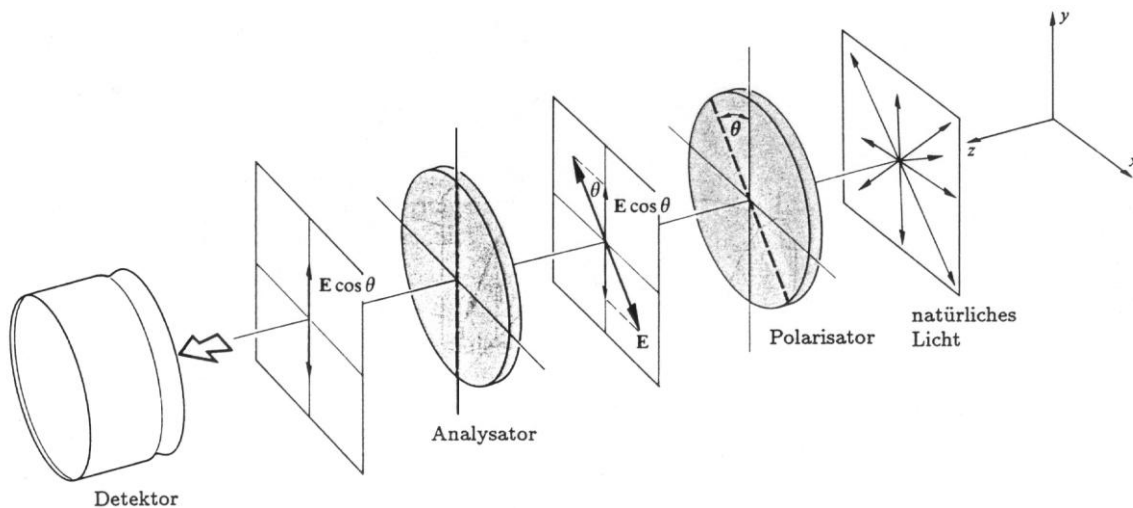


Abb. 3.4: Linearpolarisator und Analysator

Doppelbrechende Kristalle

Bisher wurde vorausgesetzt, daß die Polarisierbarkeit durchstrahlter Materialien durch das transversale elektrische Feld des Lichts isotrop ist. Tatsächlich ist jedoch schon die Polarisierbarkeit einzelner Moleküle richtungsabhängig. Dies gilt umso mehr für kristalline Festkörper, bei denen die Molekülorientierungen “eingefroren” sind. Die Polarisation $\mathbf{P}$ ist dann i. allg. nicht mehr parallel zu dem elektrischen Feld $\mathbf{E}$. Man spricht von optisch anisotropen Medien. Jedoch lassen sich in kristallinen Körpern immer Achsen finden, bei denen $\mathbf{P}$ parallel zu $\mathbf{E}$ steht. Dies sind die optischen Achsen des Kristalls.

Die Wirkung eines anisotropen Mediums auf einen unpolarisierten Lichtstrahl ist in Abb. 3.5 für Kalkspat (Calcit, CaCO_3) gezeigt: Der Lichtstrahl trifft schräg zur optischen Achse auf. Der “ordentliche” Strahl (o-Strahl, Polarisation senkrecht zur optischen Achse) verhält sich “normal” und durchläuft den Kristall ohne Ablenkung. Der außerordentliche Strahl (e-Strahl) wird trotz senkrechten Einfalls abgelenkt und verläßt den Kristall mit Parallelversatz. Der Kristall zeigt Doppelbrechung.

Tatsächlich ist in solchen Materialien der Brechungsindex davon abhängig, wie der E-Vektor bezüglich der optischen Achse orientiert ist.

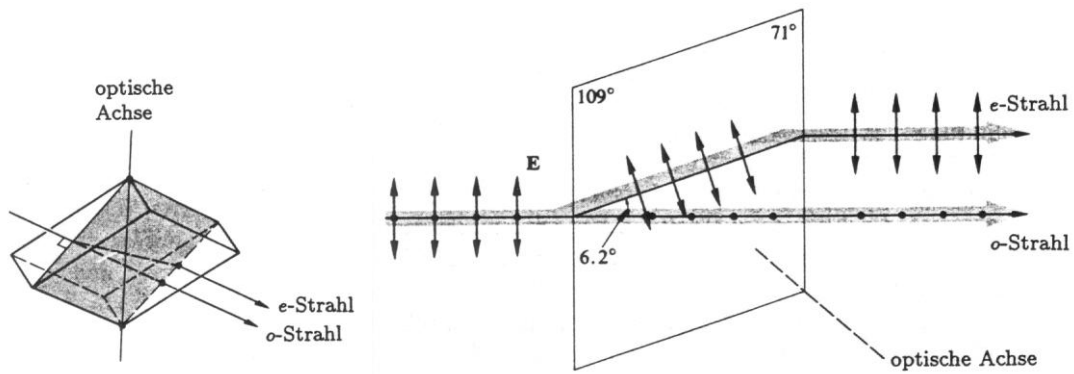


Abb. 3.5: Ein Lichtstrahl mit zwei orthogonalen Feldkomponenten durchläuft einen Kalkspathauptschnitt

Eine anschauliche Illustration der Verhältnisse zeigt Abb. 3.6. Fällt die Einfallsrichtung des Lichtstrahls mit der optischen Achse zusammen, so findet keine Strahlaufteilung statt (Abb. 3.6 a). Im unteren Teil der Abbildung sind die Werte der Brechungsindizes für den ao-Strahl (Ellipse) und den o-Strahl (Kreis) aufgetragen. Der schwarze, fette Pfeil zeigt die Richtung des einfallenden Strahls bezüglich der optischen Achse. Bei schrägem Einfall zur optischen Achse (Abb. 3.6 b) "sieht" der ao-Strahl (Ellipse) einen anderen Brechungsindex als der o-Strahl (Kreis). Der senkrechte Einfall auf die optische Achse (3.6 c) erzeugt keine laterale Trennung des o- und ao-Strahls. Erst beim Strahlaustritt machen sich die unterschiedlichen Brechungsindizes bemerkbar. Abb. 3.6 d zeigt den Strahleintritt senkrecht zur optischen Achse. Es treten zwei Brechungsindizes auf. Deutlich wird nun, daß der Brechungsindex des ao-Strahls ein Rotationsellipsoid beschreibt, der des o-Strahls eine Kugel. Außer Kalkspat wird auch Quarz (SiO_2) als doppelbrechendes Material eingesetzt.

Kalkspat
 $n_{ao(\min)} = 1,488$
 $n_o = 1,662$

 $n_{ao} - n_o = -0,174$
 negativ doppelbrechend

Quarz
 $n_{ao(\max)} = 1,555$
 $n_o = 1,546$

 $n_{ao} - n_o = 0,009$
 positiv doppelbrechend

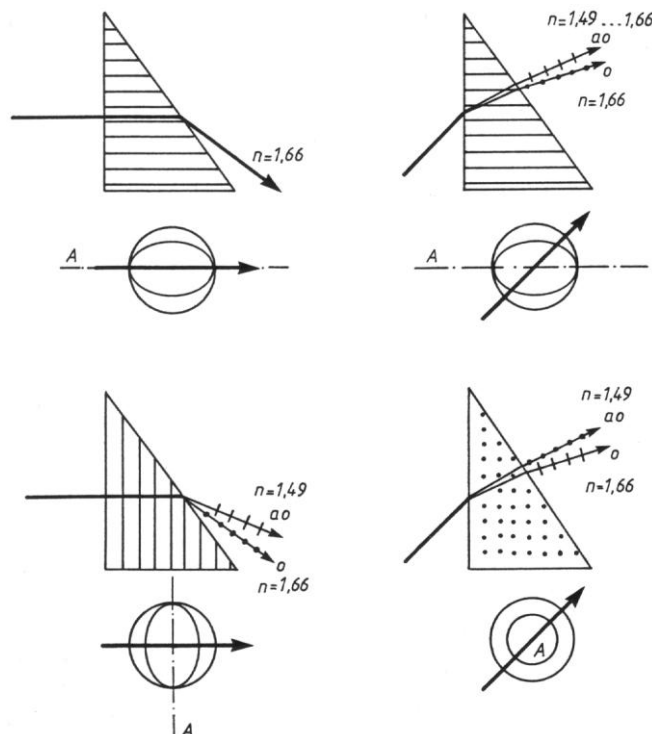


Abb. 3.6: Wirkung eines Kalkspat-Prismas auf unpolarisiert einfallendes Licht

Doppelbrechende Materialien werden zur Herstellung von Polarisations-Prismensystemen für die Erzeugung von linear polarisiertem Licht eingesetzt (vgl. Abb. 3.7).

Ausschließlich für den Gebrauch in Vorlesungen und Übungen !

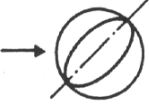
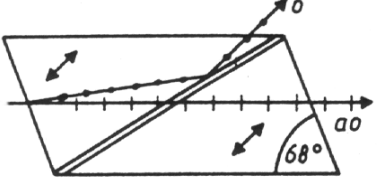
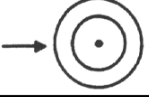
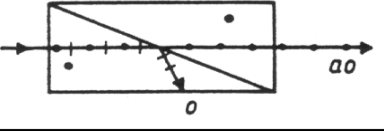
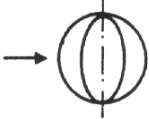
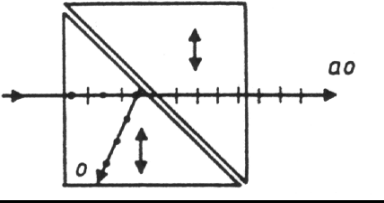
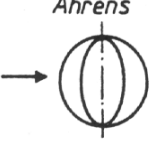
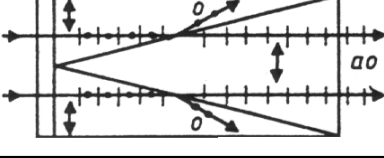
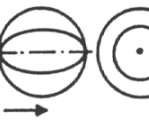
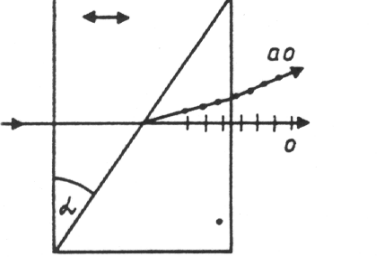
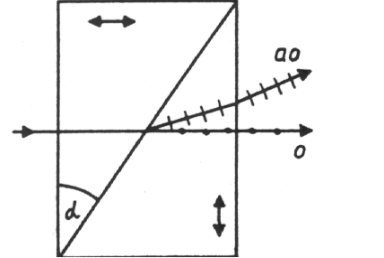
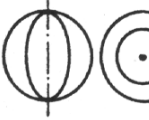
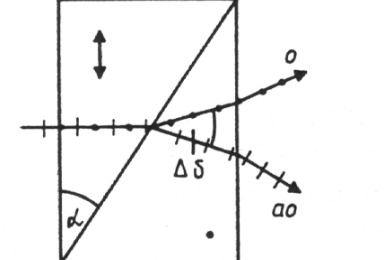
 Nicol		Kalkspat. Kitt $n = 1,54$ zwischen n_o und n_{ao}. Feld 29°. Keine ganz gleichmäßige Polarisation im Feld. Nicht mehr häufig verwendet.
 Glan-Thompson		Kalkspat. Feld bis ca. 42°: Bei $L = 2,5 \cdot D$ ca. 16°; $320 \text{ nm} - 2,3 \mu\text{m}$ $L = 3 \cdot D$ ca. 28°; $350 \text{ nm} - 2,3 \mu\text{m}$. „Verbessertes Nicol“, das dessen Nachteile vermeidet.
 Glan-Taylor (UV)		Kalkspat, Luftabstand. Feld 8°, als „Doppel-Glan-Taylor“ ca. 13°. Auch Spezialausführung „Glan-Laser“ für Laserstrahlung hoher Energie. $214 \text{ nm} - 2,3 \mu\text{m}$; VIS-Ausführung $310 \text{ nm} - 2,3 \mu\text{m}$. LV $10^4 - 10^6$.
 Ahrens		3 Kalkspat-Prismen mit Quarz-Deckplatte. Großer Feldwinkel ca. 38° bei geringer Baulänge. $L = 1,75 \cdot D$; ca. $340 \text{ nm} - 2,3 \mu\text{m}$. Bei $L = 1,25 \cdot D$ Feld ca. 30°, dafür $300 \text{ nm} - 2,3 \mu\text{m}$.
 Rochon		Polarisations-Strahlenteiler; unabgelenkter Strahl o achromatisch. Kalkspat oder Quarz, erstes Prisma auch Glas. Auch mit Luftabstand (Laser); auch in Würfel-form. Richtungsdifferenz $\Delta\delta$ nimmt mit Winkel α zu: z.B. bei $\alpha = 45^\circ$: $\Delta\delta = 10^\circ$ für Kalkspat. Für UV: MgF_2; $140 \text{ nm} - 7 \mu\text{m}$, $\Delta\delta = 4^\circ$.
 Sénarmont		Polarisations-Strahlenteiler; unabgelenkter Strahl o achromatisch. Quarz oder Kalkspat; auch in Würfel-form.
 Wollaston		Polarisations-Strahlenteiler mit großer Richtungsdifferenz; leicht unsymmetrische Ablenkung von o und ao. Kalkspat oder Quarz. Bei $\alpha = 45^\circ$: $\Delta\delta = 20^\circ$ für Kalkspat und ca. 1° für Quarz. Mit Kalkspat-Wollaston aus 3 Teilen bis $\Delta\delta = 30^\circ$. $300 \text{ nm} - 2,2 \mu\text{m}$.

Abb. 3.7: Kristall-Polarisatoren

Polaroidfilter

Der weitverbreiteste Linearpolarisator wird aus Kunststoffolien hergestellt. Hierbei wird eine farblose Folie aus Polyvinylalkohol erhitzt und mechanisch gestreckt, wobei sich ihre langen Kohlenwasserstoffketten ausrichten. Danach wird die Folie in eine Jodlösung getaucht. Das Jod durchdringt den Kunststoff und lagert sich dort an. Entlang den Molekülketten können sich Leitungselektronen bewegen. Schwingt der Feldvektor des auftreffenden Lichts parallel zu diesen Ketten, werden die Elektronen bewegt, es tritt Absorption auf. Die Durchlaßachse steht daher senkrecht zu den Molekülketten.

Verzögerungsplatten

Um die Polarisation einer Welle in gewünschter Weise zu ändern, werden Verzögerungsplatten eingesetzt, bei denen die unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten ($c_a = c_0/n_a$, $c_{ao} = c_0/n_{ao}$) des a- und o-Strahls ausgenutzt werden, um deren optische Weglängen so einzustellen, daß sich feste Phasenverschiebungen $\Delta\varphi$ ergeben. Ein $\lambda/2$ -Plättchen führt zur optischen Wegdifferenz $d |n_a - n_{ao}| = (2m + 1) \lambda_0/2$. Dessen Wirkung läßt sich entsprechend Abb. 3.8 verstehen. Ein linear polarisierter Strahl, der durch zwei senkrecht zueinander stehende Polarisationszustände dargestellt werden kann, trifft auf solch ein Plättchen, z. B. aus Calcit. Da der Brechungsindex des o-Strahls größer ist als der des ao-Strahls, ist der o-Anteil der Welle langsamer und bleibt um $\Delta\varphi = \pi$ zurück, so daß die Polarisationsebene gedreht wird.

Typische Materialien: Glimmer mit $\Delta n = 0,0041$, wobei ein Plättchen bei $\lambda = 550 \text{ nm}$ gerade $67 \mu\text{m}$ dick ist, oder Quarz mit $\Delta n = 0,009$ und $d = 31 \mu\text{m}$.

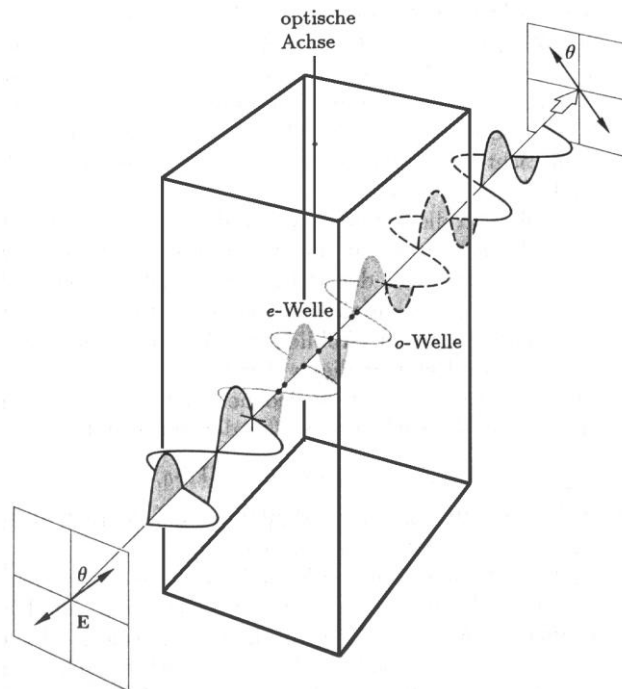


Abb. 3.8: Drehung der Polarisationsebene mit einem Lambda/2 - Plättchen

Zirkular polarisiertes Licht (Polarisationsrichtung $\theta = 45^\circ$) und elliptisch polarisiertes Licht erhält man mittels Verzögerungsplatten mit $\Delta\varphi = \pi/2$ ($\lambda/4$ -Plättchen). Allerdings: ist die Polarisationsrichtung des einfallenden linear polarisierten Lichts parallel zur Kristallachse, kann keine Phasenverschiebung stattfinden.

Optische Modulatoren

Es gibt eine Reihe physikalischer Effekte, die die Schwingungsebene von polarisiertem Licht drehen. Hierzu gehört z. B. die Spannungsdoppelbrechung. Bei Druck- oder Zugbeanspruchung können Stoffe optisch aktiv werden, so daß sich hiermit die inneren Spannungen eines Materials darstellen lassen.

Faraday Effekt (Magnetooptischer Effekt) Fällt linear polarisiertes Licht auf Materialien wie NaCl oder ZnS, an die longitudinal zum Lichtstrahl ein Magnetfeld H gelegt wird, so dreht sich die Polarisationsrichtung. Der Drehwinkel Φ ist abhängig von der magnetischen Induktion $B = \mu H$, der Länge l des durchlaufenen Materials sowie von einer materialabhängigen Konstanten (Verdet-Konstante) V .

$$\Phi = B l V \quad (6)$$

Die Verdet-Konstante zeigt eine starke Abhängigkeit von der Temperatur und der Wellenlänge des Lichts.

Substanz	V [Bogenminuten/(T m) 10^6] ($\lambda = 589 \text{ nm}$)
H ₂ O	0,0131
NaCl	0,0359
ZnS	0,179

Beispiel: Legt man an einen NaCl Kristall von 1 cm Länge ein Feld von 1 Tesla an, so dreht sich die Polarisationsrichtung um 6° .

Um Licht Information aufzuprägen (Kommunikationstechnik), soll die Lichtwelle mit hoher Geschwindigkeit kontrolliert verändert werden (Modulation). Damit der Intensitätsverlust gering bleibt, muß die Länge des Materials kurz sein (Absorption). Der Drehwinkel soll groß sein. Für den Einsatz im Infrarotbereich (um 1000 nm) wurden synthetische Kristalle gezüchtet: Yttrium-Eisengranat (YIG = Yttrium-iron garnet). Wegen der Spulen zur Erzeugung des Magnetfelds (Induktivität) sind jedoch nur niedrige Frequenzen möglich. Deshalb wird der Faraday-Effekt für Isolatoren genutzt. Hierbei kann die Welle nur in eine Richtung laufen. Verwendung in der Lasertechnik, um unerwünschte Reflexionen zu vermeiden.

Das Prinzip ist in Abb. 3.9 dargestellt: die Polarisation eines von links nach rechts laufenden Lichtstrahls wird im YIG-Kristall um 45° gedreht, so daß er ungeschwächt den zweiten Polarisator durchläuft. Die Polarisation eines von rechts nach links laufenden Lichtstrahls wird in derselben Richtung um 45° gedreht und somit an P1 abgeblockt.

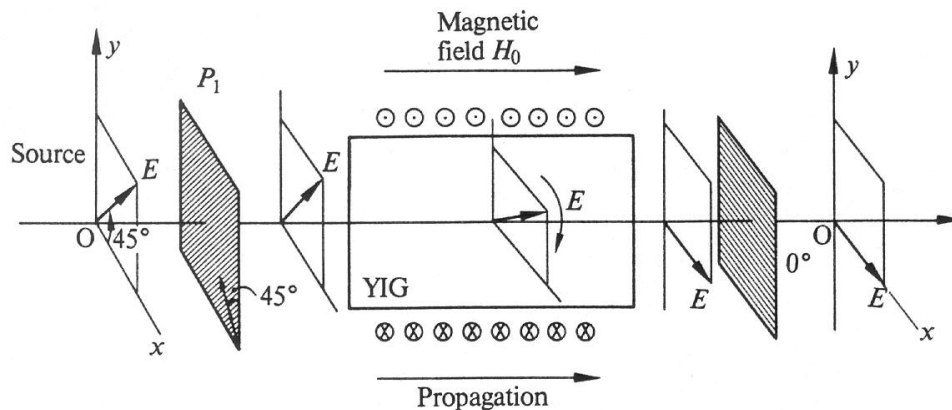


Abb. 3.9: Prinzip eines optischen Isolators

Kerr-Effekt (Quadratischer elektrooptischer Effekt)

Beim Kerr-Effekt ist der Drehwinkel Φ der Polarisationsebene quadratisch von der transversal zur Lichtausbreitung angelegten Feldstärke E , der Länge l des Materials sowie der Kerr-Konstante K abhängig:

$$\Phi = 2 \pi K l E^2 \quad (7)$$

Abb. 3.10 zeigt eine typische Kerr-Zelle, die zwischen zwei gekreuzten Polarisatoren steht. Liegt keine Spannung zwischen den Plattenelektroden, wird kein Licht durchgelassen. Durch Anlegen einer Spannung wird die Polarisation des durchgehenden Lichts gedreht, so daß die Zelle wie ein variables Phasenplättchen arbeitet. Es findet eine Intensitätsmodulation statt. Einsatz: Sehr schneller Lichtverschluß, HF-Photographie, Lichtzerhacker, Güteschalter bei Lasern. Sehr hohe Frequenzen möglich, entsprechend der Relaxationszeit der Moleküle: Nitrobenzol: $4 \cdot 10^{-11}$ s. Daher Frequenzen bis 20 GHz erreichbar.

Kerr-Zellen: typisch Nitrobenzol mit $K = 2,45 \cdot 10^{-12}$ m/V². Ist die Zelle 1 cm breit und einige cm lang, so wird eine Spannung von 30 kV !!! benötigt, um ein $\lambda/2$ Plättchen (Phasenverschiebung π) zu realisieren !

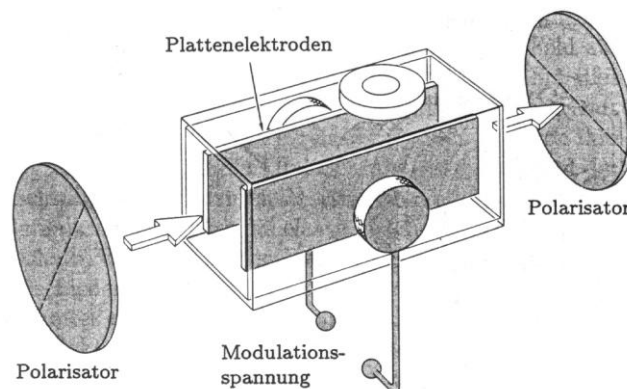


Abb. 3.10: Prinzip einer Kerr-Zelle

Pockels-Effekt

Der Pockels-Effekt ist ein linearer elektrooptischer Effekt ($\Phi \sim E$), der bei nichtzentrischen, symmetrischen Kristallen auftritt. Die notwendigen elektrischen Feldstärken sind etwa 5-10 - mal kleiner als beim Kerr-Effekt. Einsatz: sichtbarer Wellenlängenbereich, Güteschalter für Laser, Datenverarbeitung, Modulations-

frequenzen bis 25 GHz. Eingesetzte Materialien: Kaliumdideuteriumphosphat KD_2PO_4 , Bariumtitanat BaTiO_2 , Lithiumniobat LiNbO_3 .

Aufbau und Wirkung einer Pockels-Zelle zeigt Abb. 3.11. Der Feldvektor E_i der unter 45° polarisierten Welle läßt sich in zwei gleichgroße Anteile E_x und E_z zerlegen, die im Kristall aufgrund der angelegten Spannung eine Doppelbrechung erfahren. Die Unterschiede der Brechungsindizes führen zu verschiedenen Wellenlängen im Kristall, so daß die Polarisations Ebene beim Austritt um 90° gedreht ist.

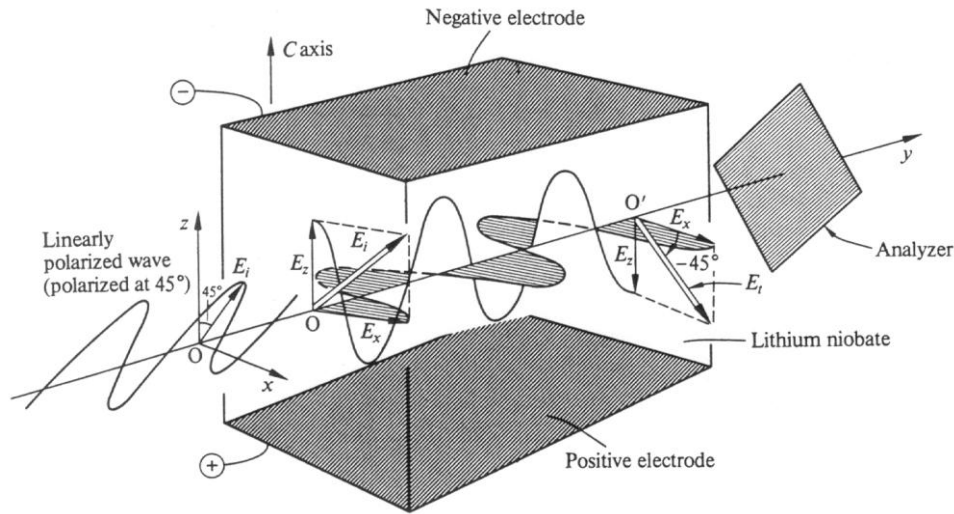


Abb. 3.11: Pockelszelle

Flüssigkristallanzeigen (passive Displays)

Flüssigkristalle sind bezüglich ihres Aggregatzustands zwischen festen und flüssigen Materialien einzuordnen. Diese Zwischenphasen werden flüssigkristalline Phase oder mesomorphe Phase genannt. Flüssigkristalle sind i. allg. organische Substanzen, deren Moleküle eine längliche Struktur aufweisen. Aufgrund der Kristalleigenschaften tritt Doppelbrechung auf.

In Abhängigkeit von Lage und Anordnung der Moleküle zueinander werden bei Flüssigkristallen (FK) drei Typen unterschieden: smektische, nematische und cholesterische Phase. Smektische FK zeigen eine Schichtstruktur, nematische FK eine gewisse Nahordnung und cholesterische FK eine Verdrillung. Die technisch bedeutsamste ist die nematische Phase. Durch Mischung von Substanzen läßt sich der Bereich der Mesophase nematischer FK im Temperaturbereich von -20 bis $+70^\circ\text{C}$ stabil halten. Einsatz in Displays, Uhren, Rechnern, Bildschirmgeräten.

Wichtigstes Anwendungsbeispiel für den Einsatz in Flüssigkristallanzeigen ist die verdrillt nematische Zelle (TN, twisted nematic), bei der zwei Elektroden (Glas mit elektrisch leitfähiger Indium-Zinnoxidbeschichtung, ITO) so vorstrukturiert sind, daß sich die Moleküle gemäß der Vorzugsrichtung ausgerichtet an den Elektroden anlagern. Zwischen den in etwa $10\ \mu\text{m}$ Abstand befindlichen Elektroden liegt eine Flüssigkristallschicht, deren Moleküle sich entsprechend der Verdrillung ausrichten (Abb. 3.12). Ober- und unterhalb der Elektroden befinden sich Polarisatoren.

Auftreffendes unpolarisiertes Licht wird polarisiert, wobei die Polarisationsrichtung im FK der Drehrichtung der Moleküle folgt. Im vorliegenden linken Bild läßt sich daher keine Transparenz erzielen.

Legt man nun ein elektrisches Feld an, so wird in den Molekülen ein Dipolmoment induziert. Die freien Moleküle richten sich in Feldrichtung aus (Abb. 3.12, rechts). Die Zelle wird lichtdurchlässig. Durch Drehung eines Polarisators läßt sich dieses Verhalten auch invertieren, d. h. die Zelle kann auch in Transmission betrieben werden. Für den Betrieb der Zellen muß Wechselspannung angelegt werden, um eine elektrolytische Zersetzung des Materials zu vermeiden.

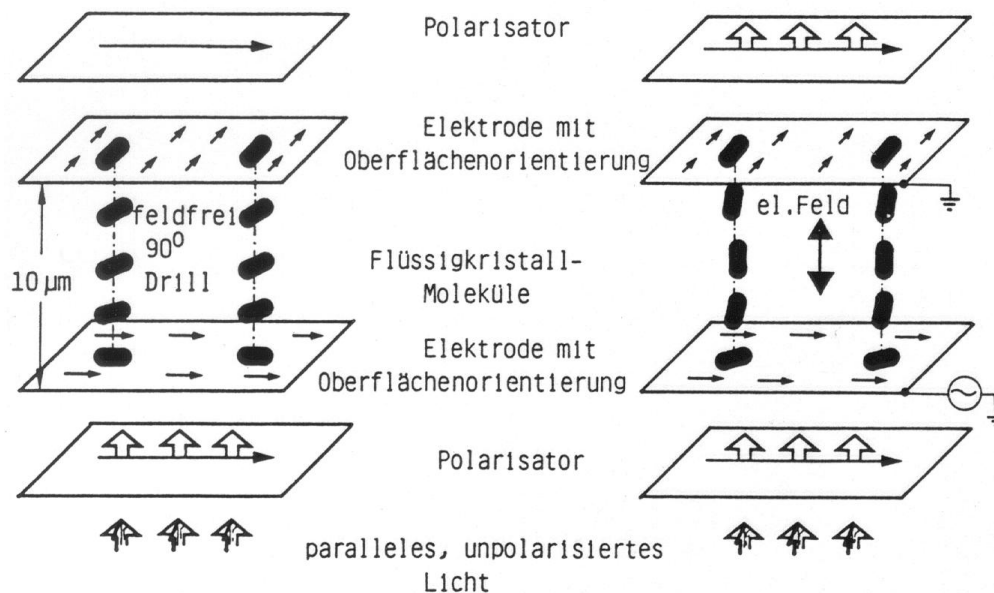


Abb. 3.12: Optisches Verhalten einer TN-Zelle zwischen parallelen Polarisatoren

Der Aufbau einer Flüssigkristallanzeige ist in Abb. 3.13 gezeigt. Die Anordnung zeigt Front- und Rückplatte, deren ITO-Schicht (25-500 nm) mittels Lithographie und Ätztechnik strukturiert sind. Zwischen Rück- und Frontplatte sorgt ein Abstandshalter für den Abstand von etwa 10 µm. Durch eine Füllöffnung wird der FK eingefüllt. Transparenz/Sperrung des Lichts tritt nur an den angesteuerten Segmenten auf.

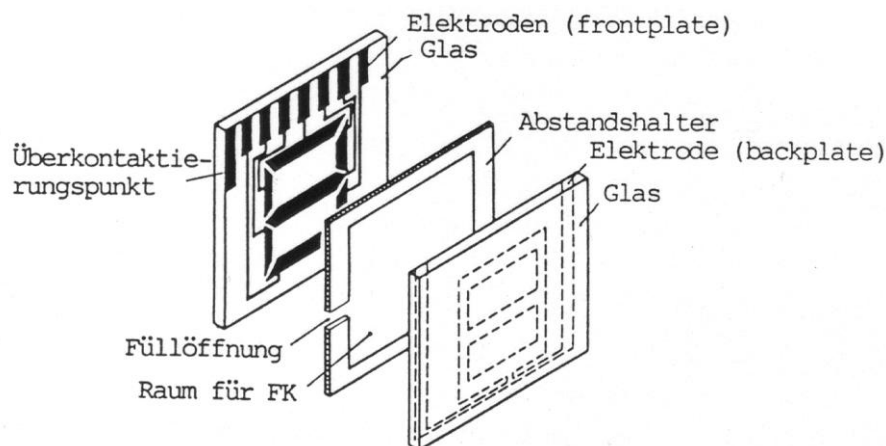


Abb. 3.13: Aufbau einer LCD Displays (7-Segmentanzeige)

4. Reflexion und Transmission an Grenzflächen

Beim Übertritt des Lichts von einem Medium mit dem Brechungsindex n_i in ein Medium mit dem Brechungsindex n_t tritt außer Lichtbrechung auch Reflexion auf. Allerdings sind Reflexions- und Transmissionsvermögen verschieden, je nachdem der elektrische Feldvektor senkrecht oder parallel zu einer Referenzebene schwingt, die durch einfallenden und reflektierten Strahl aufgespannt wird (Abb. 4.1).

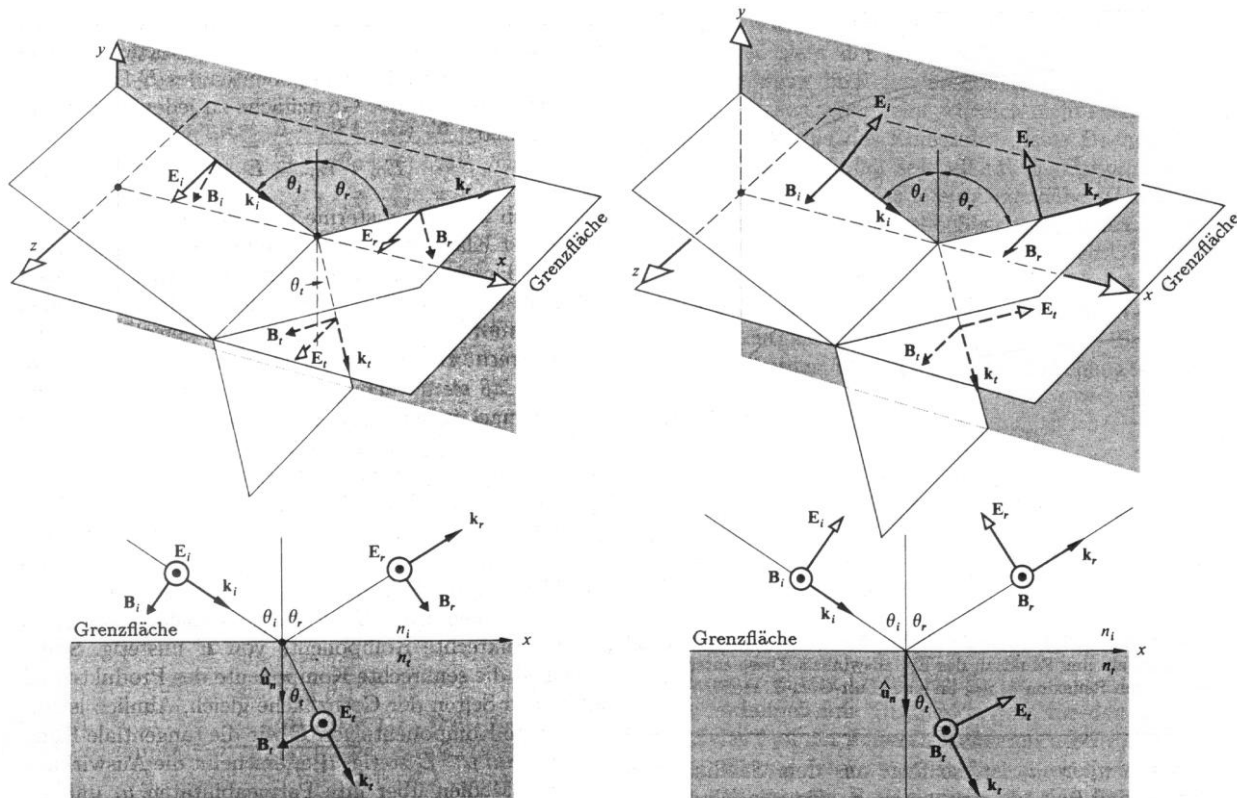


Abb. 4.1: Ankommende Welle, deren E-Feld senkrecht zur Einfallsebene steht (links), bzw. in der Einfallsebene liegt (rechts)

Reflexionskoeffizient r und Transmissionskoeffizient t der Amplituden lassen sich anhand der Maxwellgleichungen für die Vektoren $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ gewinnen (siehe z. B. [2]). Die Koeffizienten $r_{\perp}$ und $t_{\perp}$ der **senkrecht** zur Referenzebene polarisierten ebenen Wellen lauten:

$$r_{\perp} = (E_{0r}/E_{0i})_{\perp} = (n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t) / (n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t) \quad (1)$$

$$t_{\perp} = (E_{0t}/E_{0i})_{\perp} = 2 n_i \cos \theta_i / (n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t) \quad (2)$$

Dieser Ausdruck gilt allerdings nur für dielektrische Materialien ($\mu \approx \mu_0$, also z. B. Glas, Polymere o. ä.) und nicht für Metalle. Die Koeffizienten für Polarisationszustände, die in der Referenzebene liegen, lauten:

$$r_{\parallel} = (E_{0r}/E_{0i})_{\parallel} = (n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t) / (n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i) \quad (3)$$

$$t_{\parallel} = (E_{0t}/E_{0i})_{\parallel} = 2 n_i \cos \theta_i / (n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i) \quad (4)$$

Die Gleichungen (1-4) heißen auch **Fresnel'sche Gleichungen**. Sie beschreiben das Verhalten der Amplituden linear polarisierter elektromagnetischer Wellen an Grenzflächen.

Für senkrechten Strahleneinfall von Luft in Glas ($\theta_i = 0^\circ$, $n_i = 1$, $n_t = 1,5$) ergibt sich - $r_{\perp} = r_{\parallel} = (n_i - n_t) / (n_i + n_t) = 0,2$, d. h. 20 % der einfallenden **Amplitude** wird reflektiert. Für die **Intensität** der reflektierten Strahlung folgt wegen $I_R = I_0 r^2$, so daß 4 % der einfallenden Intensität reflektiert werden. Dieser störende Effekt läßt sich durch das Aufbringen reflexionsvermindernder Schichten (siehe unten) vermeiden.

Mit dem Snellius'schen Brechungsgesetz $n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$ lassen sich die Ausdrücke 1 - 4 vereinfachen:

$$r_{\perp} = -\sin(\theta_i - \theta_t) / \sin(\theta_i + \theta_t) \quad r_{\parallel} = \tan(\theta_i - \theta_t) / \tan(\theta_i + \theta_t) \quad (5)$$

$$t_{\perp} = 2 \sin \theta_t \cos \theta_i / \sin(\theta_i + \theta_t) \quad t_{\parallel} = 2 \sin \theta_t \cos \theta_i / [\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)] \quad (6)$$

Abb. 4.2 zeigt die Amplitudenkoeffizienten als Funktion des Eintrittswinkels θ_i für die Medien Luft und Glas ($n_i = 1$, $n_t = 1,5$).

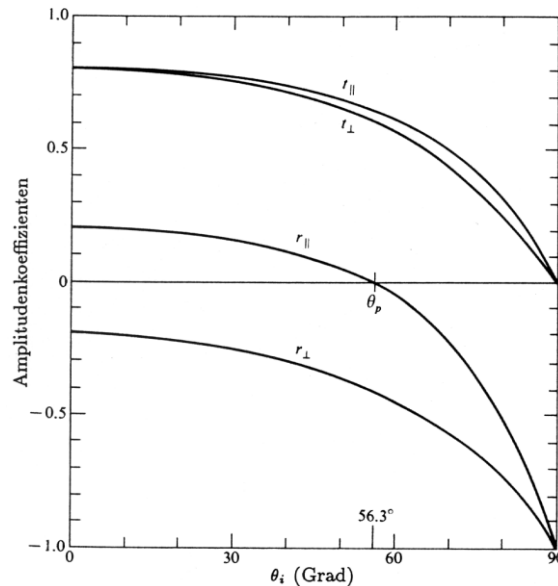


Abb. 4.2: Amplitudenkoeffizienten für Reflexion und Brechung

Abb. 4.2 verdeutlicht nochmals, daß die Reflexionskoeffizienten bei senkrechtem Einfall für beide Polarisationsrichtungen identisch 20 % betragen (es gibt keine ausgezeichnete Richtung). Der Amplitudentransmissionskoeffizient ist 80 %. Weiterhin zeigt Abb. 4.2:

- Die Transmissionskoeffizienten werden mit zunehmendem Einfallswinkel kleiner,
- das Reflexionsvermögen für senkrecht polarisiertes Licht ist größer als für parallel polarisiertes,
- am Brewsterwinkel θ_p wird das Reflexionsvermögen für parallel polarisiertes Licht $\equiv 0$,
- die reflektierte Amplitude des senkrecht polarisierten Strahls zeigt einen Phasensprung von π ,
- bei Einfallswinkeln $> \theta_p$ tritt für die reflektierte Amplitude des parallel polarisierten Strahl ein Phasensprung von π auf.

Schickt man Licht vom optisch dichteren in das optisch dünnere Medium, so kann man nun unter der Bedingung $n_i > n_t$ die Reflexionskoeffizienten bestimmen (Abb.4.3, Übergang Glas $n_i = 1,5$ in Luft $n_t = 1$). Für den parallel polarisierten Strahl tritt bei dem Winkel θ_p' keine Reflexion auf. Am Grenzwinkel der Totalreflexion θ_c erfolgt vollständige Reflexion für beide Polarisationszustände.

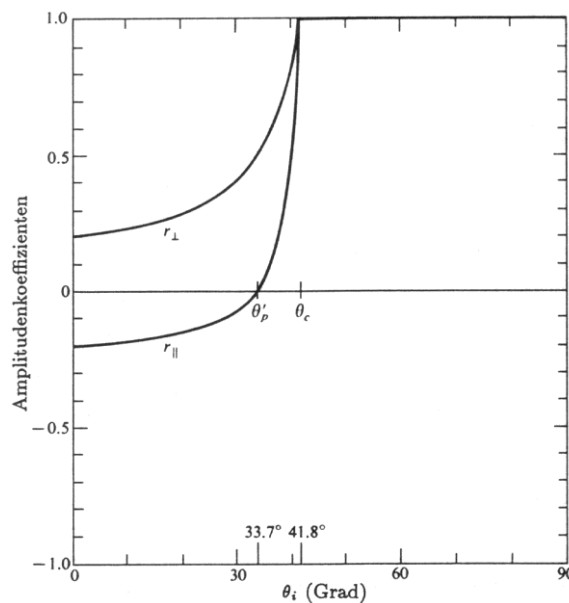


Abb. 4.3: Amplitudenkoeffizienten Reflexion und Brechung Glas -> Luft

Für praktische Zwecke sind nur meßbare Größen von Interesse, d. h. die Koeffizienten der Leistungsreflexion. Abb. 4.4 zeigt die Winkelabhängigkeit der Koeffizienten R_s und R_p , mit $R_s = r_{\perp}^2$ und $R_p = r_{\parallel}^2$ in linearer und logarithmischer Darstellung. Luft -> Glas mit $n_i = 1$ (Luft) und $n_t = 1,51673$ (BK7-Glas). Abb. 4.5 zeigt die Winkelabhängigkeit der Koeffizienten R_s und R_p für den Übergang Glas -> Luft.

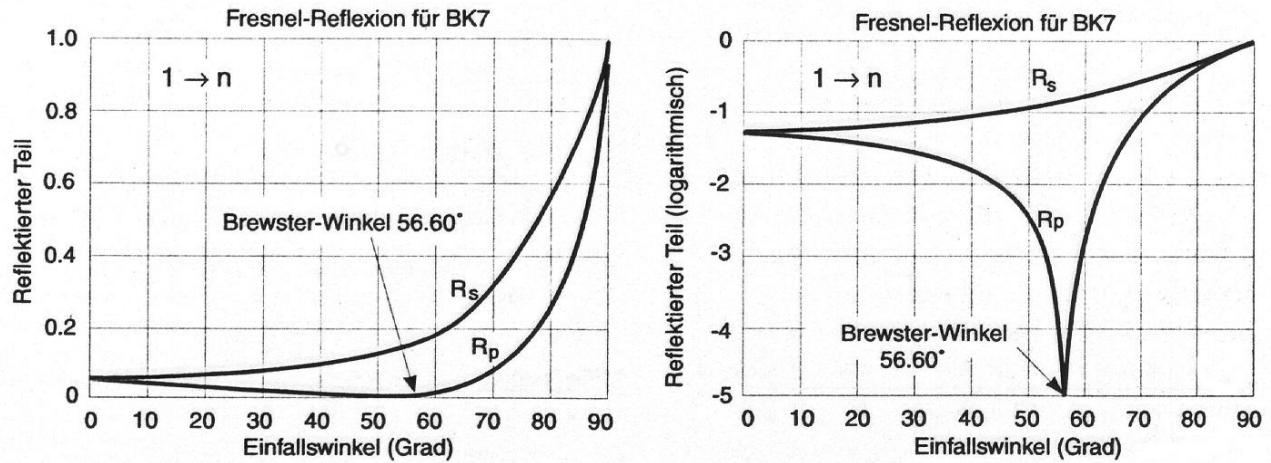


Abb. 4.4: Koeffizienten für die Leistungsreflexion 1 → n

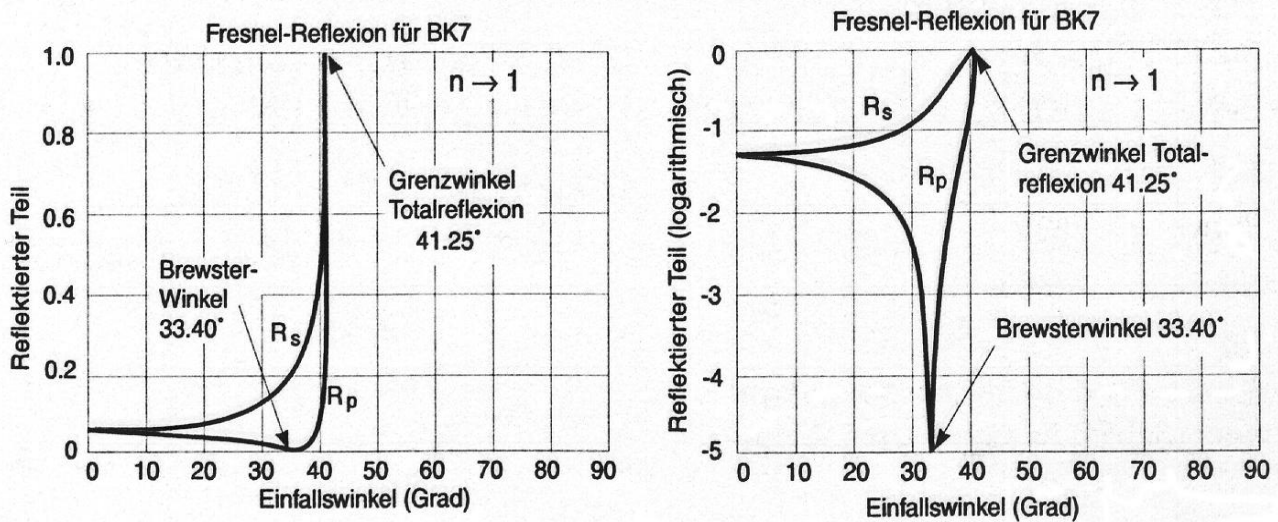


Abb. 4.5: Koeffizienten für die Leistungsreflexion n → 1

Zum Brewsterwinkel

Am Brewsterwinkel wird parallel polarisiertes Licht nicht reflektiert. Der Einfall elektromagnetischer Strahlung erzeugt ein schnell veränderliches elektrisches Feld, das die Elektronen des Materials an der Oberfläche zum Schwingen anregt. Dies führt dazu, daß die Elektronen wiederum Licht emittieren, und zwar mit einer Winkelverteilung, die man als Hertz'sche Dipolstrahlung bezeichnet (Abb. 4.6, 4.7). Dabei strahlt ein Dipol **senkrecht** zu seiner Schwingungsrichtung mit Maximalamplitude. Bilden der einfallende und der transmittierte Strahl einen rechten Winkel: $\theta_i + \theta_t = 90^\circ$, so folgt mit $n_i \sin\theta_i = n_t \sin\theta_t$ und $\theta_t = 90^\circ - \theta_i$ die Beziehung $n_i \sin\theta_i = n_t \cos\theta_i$ und damit die Bestimmungsgleichung für den Brewsterwinkel θ_p :

$$\tan \theta_i = n_t / n_i \quad (7)$$

Für den Fall des Übergangs von Luft in Glas mit $n_i = 1$ und $n_t = 1,5$ ergibt sich als Brewsterwinkel $\theta_p = 56,3^\circ$ und für den Übergang von Glas in Luft $\theta_p = 33,7^\circ$.

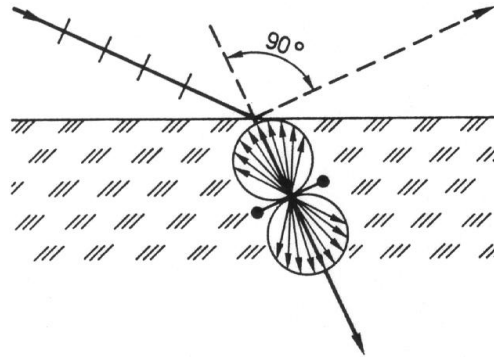


Abb. 4.6: Abstrahlcharakteristik eines linear schwingenden Elektrons

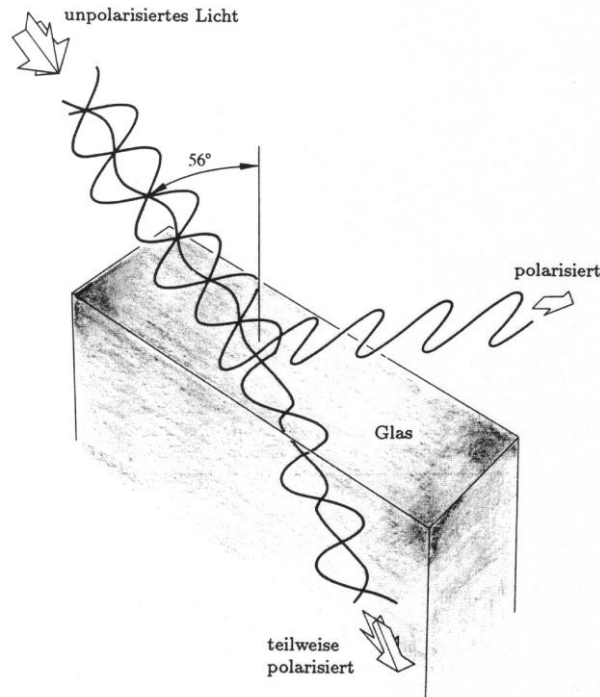


Abb. 4.7: Polarisation von Licht bei Reflexion am Brewsterwinkel

Bei einem unpolarisierten Lichtstrahl, der mit einem Einfallswinkel von $\theta_i = \theta_p$ z. B. auf Glas fällt, ließe sich deshalb am Brewsterwinkel der Anteil des parallel polarisierten Lichts durch Reflexion herausfiltern. Allerdings ist die Reflexion des senkrecht polarisierten Anteils recht schwach, so daß hierbei viel Intensität verloren geht. Stattdessen läßt sich der durchgehende Teil des Strahls nutzen, wenn mehrere Schichten vorhanden sind, so daß an jeder Teilschicht senkrecht polarisierte Anteile der Strahlung heraus"reflektiert" werden und letztlich nur noch der parallel polarisierte Anteil transmittiert wird (Abb. 4.8). Diese Anordnung kann als Polarisator dienen.

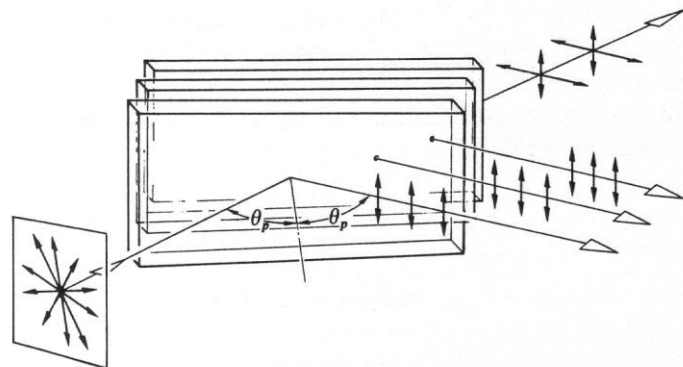


Abb. 4.8: Glasplattensatz als Polarisator

5. Überlagerung von Wellen

Überlagern sich mehrere Einzelwellen in einem Raumgebiet, so entstehen räumliche und ggfs. auch zeitliche Variationen der Feld- und Intensitätsverteilung, sogenannte Interferenzmuster.

Überlagerung ebener monochromatischer Wellen

Betrachte zwei ebene monochromatische Wellen derselben Frequenz, die sich, ausgehend von ihren Lichtquellen L_1 und L_2 nach den Wegen r_1 und r_2 im Punkt P treffen (Abb. 5.1):

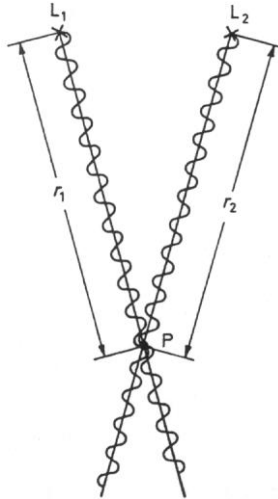


Abb. 5.1: Interferenz zweier Wellenzüge

$$E_1 = E_{01} \cos(kr_1 - \omega t + \phi_1) \quad E_2 = E_{02} \cos(kr_2 - \omega t + \phi_2) \quad (1)$$

Die Intensitäten der Einzelwellen stellen sich dar als: $I_1 = \varepsilon c \langle E_1^2 \rangle$, $I_2 = \varepsilon c \langle E_2^2 \rangle$

$$\begin{aligned} E_1 E_1 &= E_{01}^2 [\cos(kr_1 + \phi_1) \cos \omega t + \sin(kr_1 + \phi_1) \sin \omega t] [\cos(kr_1 + \phi_1) \cos \omega t + \sin(kr_1 + \phi_1) \sin \omega t] \\ &= E_{01}^2 [\cos^2(kr_1 + \phi_1) \cos^2 \omega t + 2 \cos(kr_1 + \phi_1) \sin(kr_1 + \phi_1) \cos \omega t \sin \omega t + \sin^2(kr_1 + \phi_1) \sin^2 \omega t] \end{aligned}$$

mit $\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$, $\langle \sin^2 \omega t \rangle = 1/2$, $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$ ergibt sich für I_1

$$I_1 = \varepsilon c \langle E_1 E_1 \rangle = 1/2 \varepsilon c E_{01}^2 \langle \cos^2(kr_1 + \phi_1) + \sin^2(kr_1 + \phi_1) \rangle = 1/2 \varepsilon c E_{01}^2$$

Elektromagnetische Wellen sind Lösungen der Wellengleichung. Wegen der Linearität der Wellengleichung stellen auch die Summen Lösungen der Wellengleichung dar. Die Gesamtfeldstärke ist deshalb:

$$E = E_1 + E_2 \quad (2)$$

so daß die Gesamtintensität I sich darstellt als: $I_{\text{ges}} = \varepsilon c \langle (E_1 + E_2)^2 \rangle$

Mit $(E_1 + E_2)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2$ ergibt sich hieraus die Gesamtintensität:

$$I_{\text{ges}} = I_1 + I_2 + I_{12} \quad \text{mit } I_{12} = 2 \varepsilon c \langle E_1 E_2 \rangle \quad (3)$$

Die Gesamtintensität stellt sich also nicht einfach als Summe der Einzelintensitäten dar. Hinzu kommt der sogenannte Interferenzterm:

$$E_1 E_2 = E_{01} E_{02} \cos(kr_1 - \omega t + \phi_1) \cos(kr_2 - \omega t + \phi_2) \quad (4)$$

mit den Additionstheoremen für die Winkelfunktionen

$$[\cos(kr_1 + \phi_1) \cos \omega t + \sin(kr_1 + \phi_1) \sin \omega t] [\cos(kr_2 + \phi_2) \cos \omega t + \sin(kr_2 + \phi_2) \sin \omega t] \text{ und}$$

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2, \langle \sin^2 \omega t \rangle = 1/2, \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0 \text{ folgt}$$

$$\cos(kr_1 + \phi_1) \cos(kr_2 + \phi_2) + \sin(kr_1 + \phi_1) \sin(kr_2 + \phi_2) = \cos(kr_1 - kr_2 + \phi_1 - \phi_2)$$

Der Interferenzterm (3) läßt sich somit darstellen: $I_{12} = \varepsilon c E_{01} E_{02} \cos (kr_1 - kr_2 + \phi_1 - \phi_2) = \varepsilon c E_{01} E_{02} \cos \delta$.

Abhängig von den Wegen r_1 und r_2 sowie den Anfangsphasen ϕ_1 und ϕ_2 schwankt die Gesamtintensität zwischen dem Maximalwert

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2 (I_1 I_2)^{1/2} \quad (\text{mit } \delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots)$$

oder dem Minimalwert

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2 (I_1 I_2)^{1/2} \quad (\text{mit } \delta = \pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots)$$

Gilt speziell $I_1 = I_2 = I_0$, so schwankt die Gesamtintensität I_{ges} je nach dem betrachteten Ort zwischen den Werten 0 und $4 I_0$.

Anmerkung: Energieerhaltung gilt nach wie vor. Die Energie wird nur wegababhängig anders aufgeteilt.

Kohärenz

Damit der obige Interferenzterm zustande kommt, muß die Phasendifferenz $(\phi_1 - \phi_2)$ zeitlich konstant bleiben. Dann spricht man von Kohärenz der beiden elektromagnetischen Wellen. Natürliche Lichtquellen strahlen Licht mit statistisch verteilter Phase ab, so daß im zeitlichen Mittel keine Interferenz zustande kommt. Die Intensität zweier sich überlagernder Lichtzüge aus verschiedenen Lichtquellen mit den Intensitäten I_1, I_2 ist dann $I_{\text{ges}} = I_1 + I_2$.

Kohärenz zweier Wellenzüge läßt sich aber dadurch erreichen, daß man ein und dieselbe Lichtquelle nutzt. Hierzu einige Beispiele.

Interferenz an dünnen Schichten

Fällt Licht von einer Lichtquelle L unter dem Winkel α auf eine planparallele Platte der Dicke d und dem Brechungsindex n , so wird es an der Oberfläche reflektiert (Strahl a in Abb. 5.2) oder unter dem Winkel β gebrochen. Wir wollen den Gangunterschied der von E und C ausgehenden Wellenzüge betrachten.

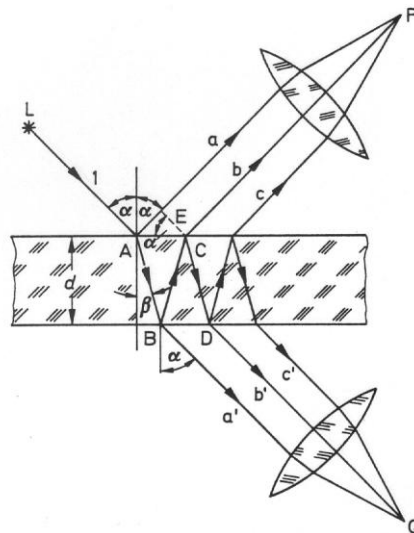


Abb. 5.2: Entstehung von Interferenzen in einer planparallelen Platte

Der optische Weg ABC ergibt sich zu $2 n d / \cos \beta$. Für die Strecke AE gilt: $AE = AC \sin \alpha = 2 d \tan \beta \sin \alpha$. Da das Licht am optisch dichteren Medium reflektiert wird, kommt hier noch ein Phasensprung $\pm \lambda/2$ hinzu.

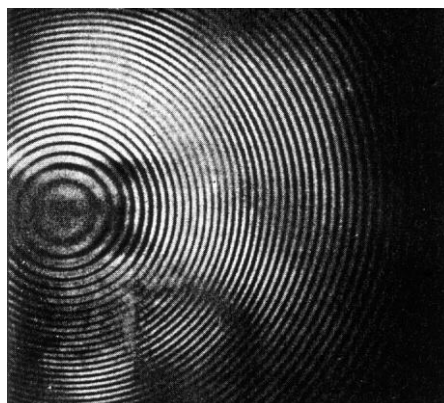


Abb. 5.3: Interferenzkurven gleicher Neigung

Ausschließlich für den Gebrauch in Vorlesungen und Übungen !

Damit ergibt sich der Gangunterschied Δ zu:

$$\Delta = 2 n d / \cos \beta - 2 d \tan \beta \sin \alpha + \lambda / 2 = 2 d / \cos \beta (n - \sin \beta \sin \alpha) + \lambda / 2$$

Mit dem Brechungsgesetz $\sin \alpha = n \sin \beta$ (Lichtstrahl 1 in Luft) folgt der Gangunterschied:

$$\Delta = 2 d (n^2 - \sin^2 \alpha)^{1/2} + \lambda / 2$$

Anmerkung: sämtliche Strahlen stammen aus dem Strahl 1, deshalb kann Interferenz auftreten (Abb. 5.3).

Helligkeit herrscht, wenn für den Gangunterschied gilt:

$$\Delta = k \lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Dunkelheit tritt auf für

$$\Delta = (2k + 1) \lambda / 2 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Wie steht es mit den Intensitäten? Bei nahezu senkrechtem Einfall gilt für den Reflexionskoeffizienten am Punkt A: $r = (1 - n)/(1 + n)$ und für die reflektierte Intensität bei A: $I_A = I_0 r^2$. Bei B trifft auf: $I_0 (1 - r^2)$. Die bei B reflektierte Intensität ist: $I_0 (1 - r^2) r^2$. Schließlich tritt am Punkt C nochmals Reflexion auf, so daß bei E die Intensität $I_E = I_0 (1 - r^2)^2 r^2$ austritt. Somit gilt $I_A/I_E = 1/(1 - r^2)^2 = 1/0,92$. Die Intensitäten sind also fast gleich, so daß sich Interferenzen gut beobachten lassen.

In Transmission sind aber die Intensitätsverhältnisse etwa 10:1, so daß Interferenzeffekte sehr schlecht sichtbar sind.

Vergütung, Entspiegelung

Interferenzen an dünnen Schichten werden zur Reflexminderung eingesetzt (Steigerung Lichtstärke von Objektiven!). Hierzu dampft man auf Glasoberflächen dünne Schichten mit kleinen Brechzahlen auf, z. B. Kryolith ($\text{Na}_3 \text{AlF}_6$, $n = 1,33$) oder Magnesiumfluorid (MgF_2 , $n = 1,38$). Trifft Licht auf, so erfährt es an der Oberseite der dünnen Schicht einen Phasensprung von $\lambda/2$. Dasselbe passiert aber auch an der Unterseite, da der Brechungsindex von Glas größer ist. Damit die reflektierten Strahlanteile ausgelöscht werden, muß die optische Dicke der Schicht gerade $\lambda/4$ betragen, vorausgesetzt, die Amplituden sind gleich.

Näherungsweise erhält man gleiche Amplituden, wenn das Reflexionsvermögen an beiden Grenzflächen gleich ist. Bezeichnet n_1 die Brechzahl der Luft, n_2 die Brechzahl der Schicht, n_3 die Brechzahl von Glas, so wird gefordert:

$$(n_1 - n_2)/(n_1 + n_2) = (n_2 - n_3)/(n_2 + n_3) \quad (5)$$

Hieraus ergibt sich als Bedingung für den Brechungsindex der Schicht:

$$n_2 = (n_1 n_3)^{1/2} \quad (6)$$

Die Reflexionsgrade vergüteter Schichten (Kryolith) auf Flintglas sind in Abb. 5.4 als Funktion der Wellenlänge eingetragen (a: keine Vergütung, b: $0,45/4 \mu\text{m}$, c: $0,55/4 \mu\text{m}$, d: $0,65/4 \mu\text{m}$). Exakt gelten die obigen Bedingungen natürlich nur für eine Wellenlänge. Wählt man die Schichtdicke geeignet, läßt sich jedoch schon eine gute Reflexminderung im gesamten sichtbaren Bereich erzielen.

Um wirklich breitbandige Antireflexschichten herzustellen, werden mehrere $\lambda/4$ -Schichten aufgedampft.

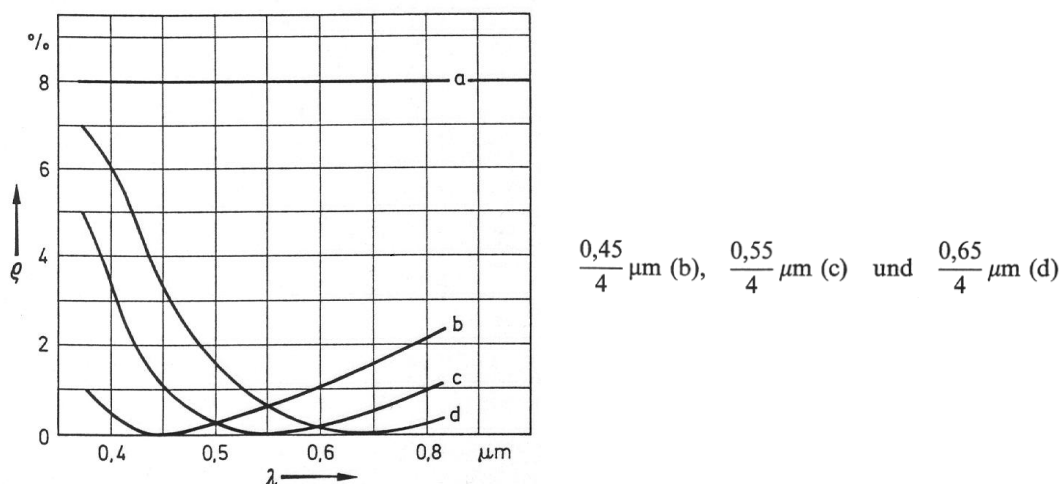


Abb. 5.4: Reflexionsgrad einer a) nicht vergüteten und einer mit Kryolith-Schichten verschiedener Dicke vergüteten Flintglas-Oberfläche (b-d).

Interferenzspiegel

Spiegel werden häufig aus Metall hergestellt. Jedoch tritt hierbei Absorption auf. Dies gilt insbesondere bei Strahlteilern (50 % reflektiert, 50 % transmittiert). Eine andere Möglichkeit zur Herstellung von Spiegeln ergibt sich durch das Aufbringen dielektrischer $\lambda/4$ -Schicht mit hohem Brechungsindex. Anhand des Reflexionsgrads $R = [(n_0 - n_1)/(n_0 + n_1)]^2$ zeigt sich, daß allein durch den großen Sprung des Brechungsindex, $n_0 = 1$, $n_1 = 2,4$ (TiO_2), die Reflektivität an der Grenzfläche 17 % beträgt. Wegen des Übergangs optisch dünn - optisch dicht tritt ein Phasensprung von π auf. Für den transmittierten Anteil ergibt sich bei der Reflexion am Substrat (z. B. $n_s = 1,5$, Glas) kein Phasensprung, aber eine Phasenverschiebung π infolge des zweifachen Wegs durch die $\lambda/4$ -Schicht. Es tritt konstruktive Interferenz auf mit dem Reflexionsgrad (siehe [2], [5]):

$$R = [(n_0 n_s - n_1^2)/(n_0 n_s + n_1^2)]^2 \quad (7)$$

Mit $n_0 = 1$, $n_1 = 2,4$, $n_s = 1,5$ beträgt die Reflexion daher 34 %. Bringt man auf ein Substrat ($n_s = 1,5$) zunächst ein Material mit niedrigem Brechungsindex (MgF_2 , $n_n = 1,38$), Schichtdicke $\lambda/4$, und hierauf ein Material mit hohem Brechungsindex, Schichtdicke $\lambda/4$, ($n_h = 2,4$) auf, so kann man mit einer Doppelschicht Reflektivitäten R von etwa 86 % erzielen. Es ist jedoch üblich, bis zu 20 solcher Doppelschichten aufzubringen (Multilayer). Bei N solchen $\lambda/4$ Vielfach-Doppelschichten ist die Reflektivität (Ableitung in [2], [5]):

$$R = [(1 - p)/(1 + p)]^2 \text{ mit } p = (n_h/n_n)^{2N} n_s/n_0 \quad (8)$$

Da $n_h > n_n$ und die Anzahl N der Schichten groß ist, wird p sehr groß, so daß sich Reflektivitäten > 99 % ergeben. Breitbandigkeit läßt sich durch leichte Dickenvariation der Schichten erzielen.

6. Interferometrie

Interferometrische Verfahren nutzen Interferenzerscheinungen durch Überlagerung von Lichtwellen für die präzise Vermessung von Oberflächen und für die Längenmessung. Je nach Verfahren lassen sich Meßgenauigkeiten von Bruchteilen einer Wellenlänge erzielen, so daß es sich hierbei um unentbehrliche Hilfsmittel für den Feinwerk/Mikrotechniker handelt.

Interferometer

Das bekannteste Interferometer (Michelson) ist in Abb. 6.1 schematisch dargestellt. Das Licht einer monochromatischen Lichtquelle L (z. B. Thallium-, Kryptonlampe oder Laser) wird durch einen Strahlteiler (z. B. silberbedampfte Glasplatte) mit 45° Neigung in die Lichtstrahlen 1 und 2 zerlegt. Die Lichtwellen mit jeweils halber Amplitude werden durch die Spiegel S_1 und S_2 reflektiert. Da der Strahl 1 dreimal die Platte P durchläuft, wird, um die Lichtwege symmetrisch zu gestalten, in den Strahlengang 2 nochmals eine planparallele Platte P' eingebracht, die keine Reflexionsschicht aufweist. Bei exakt symmetrischer Anordnung addieren sich die halbierten Amplituden am Detektor (Fernrohr, Kamera, Fotodiode) zur Ausgangsamplitude. Verschiebt man S_1 um $\lambda/4$ (He-Ne-Laser 632,8 nm), so ist der gesamte Lichtweg des Wellenzugs 1 um $\lambda/2$ verlängert. Am Detektor tritt destruktive Interferenz auf.

Bei einer kontinuierlichen Bewegung des Spiegels tritt zeitlich nacheinander die Abfolge Hell-Dunkel-Hell auf. Durch Zählen dieser Hell-Dunkel-Änderungen lassen sich größere Strecken mit Submikrometergenauigkeit vermessen.

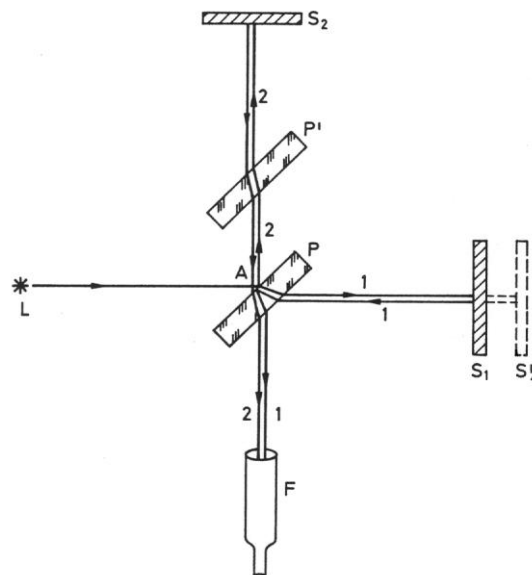


Abb. 6.1: Aufbau des Michelson-Interferometers

Ausschließlich für den Gebrauch in Vorlesungen und Übungen !

Tatsächlich ist das Michelson Interferometer schwierig zu justieren, da die Spiegel exakt parallel stehen müssen, um gute Meßresultate zu erzielen. Statt dessen werden Retroreflektoren eingesetzt, die das Licht auch bei kleinen Verkipfungen um 180° reflektieren. Abb. 6.2 zeigt ein solches Längenmeßsystem. Auf dieser Grundlage beruhen alle Meßinterferometer des Werkzeugmaschinenbaus. Dabei wird standardmäßig eine Meßauflösung von $0,1\text{ }\mu\text{m}$ erreicht, durch Interpolation bis zu 1 nm . An den Detektoren D und C werden Signale aufgenommen, die einer Phasenverschiebung von 90° entsprechen. Dies kann zur Richtungserkennung verwandt werden.

Die Genauigkeit der Messung ist stark von der Laserwellenlänge λ abhängig, die während der Messung konstant sein muß. Allerdings variiert der Brechungsindex der Luft und damit auch λ mit der Feuchte, dem Druck und der Temperatur, so daß weiterhin die Umgebungsbedingungen konstant sein müssen.

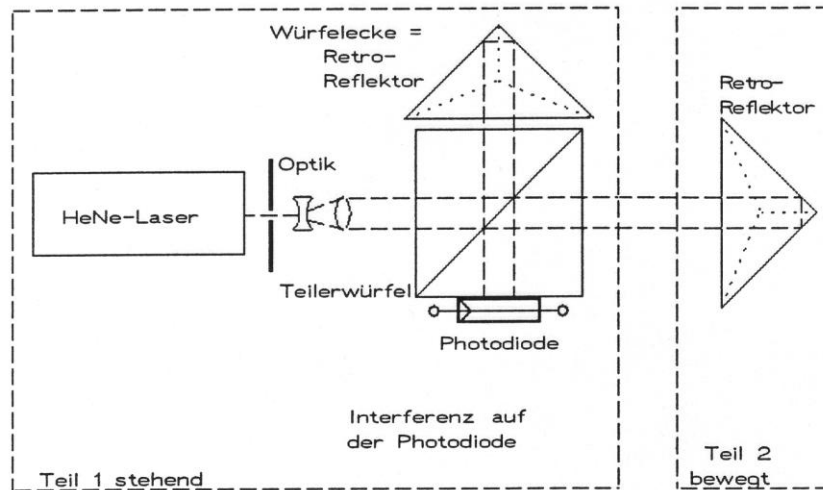


Abb. 6.2: Interferometrisches Meßsystem mit Retroreflektor

Das Interferenzmikroskop ist eine Interferometervariante zur Prüfung von Oberflächen. Das Prinzip ist in Abb. 6.3 dargestellt. Hierbei überlagern sich die über den Strahlteiler T an der extrem ebenen Referenzfläche S gespiegelten Strahlanteile mit den an der Oberfläche des Prüflings P gespiegelten Teilstrahlen. Ein Filter F verhindert Fremdlichteinflüsse. Linsen vermitteln ein scharfes Bild. Abb. 6.4 zeigt eine typische Interferenzaufnahme einer Kugelfläche mit Kratzer.

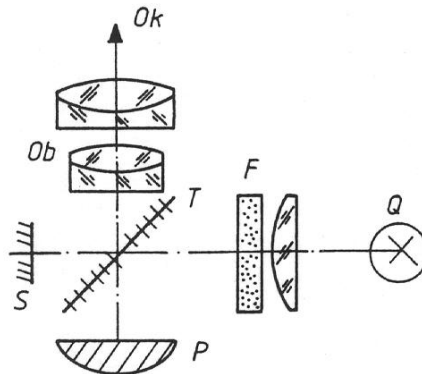


Abb. 6.3: Mikro-Interferometer ("Interferenzmikroskop"); vereinfachter Aufbau



Abb. 6.4: Beispiel einer Interferenzaufnahme (Kugelfläche mit Kratzspur)

7. Lichtbeugung

Beugung tritt infolge der Wellennatur des Lichts auf und beschreibt die Abweichungen von der geometrischen Optik. Beugungserscheinungen treten immer dann auf, wenn die Ausbreitung der Wellen durch Objekte behindert ist. Hierbei gibt es Lichtstrahlen, die von der Richtung des einfallenden Lichts abweichen. Schematisch ist dies in Abb. 7.1 dargestellt. Fresnel'sche Beugung beobachtet man beim Durchgang des Lichts divergenter Lichtbündel an engen Öffnungen. Fraunhofer'sche Beugung tritt bei dem Durchgang paralleler Lichtbündel auf.

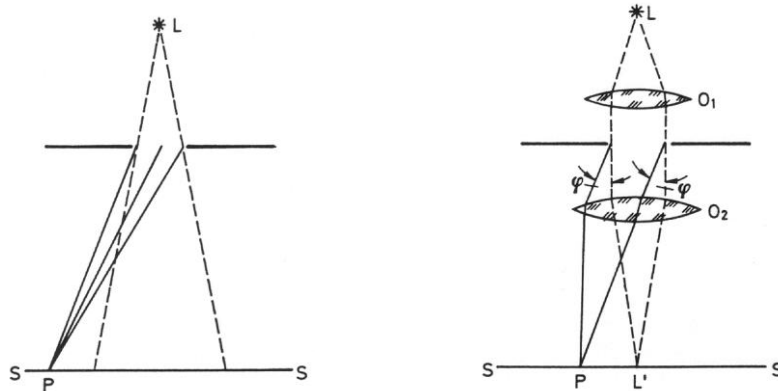


Abb. 7.1: Fresnel'sche Lichtbeugung an einer engen Öffnung (links); Fraunhofer'sche Lichtbeugung an einer engen Öffnung (rechts)

Beugung am Spalt

Auf einen Spalt der Breite b treffe monochromatisches paralleles Licht, das sich in alle Richtungen ausbreitet (Abb. 7.2). Wir wollen die Intensität des Lichts in Richtung φ berechnen. Hierzu wird der Spalt in p einzelne Streifen der Breite $\beta = b/p$ eingeteilt. Jeder Streifen sendet nach dem Huygens'schen Prinzip wieder eine Kugelwelle aus, deren Amplitude proportional der Streifenbreite β ist. Die Feldstärke E der Welle vom Punkt A im Abstand l vom Spalt lässt sich in komplexer Schreibweise ausdrücken:

$$E_A \sim \beta e^{i(kl - \omega t)} \quad (1)$$

Wir wollen später nur den Realteil betrachten. Die anderen Streifen liefern gleichfalls Feldstärkebeiträge, die aber, wegen der Beobachtungsrichtung φ , jeweils mit einer Phasenverschiebung ankommen. Die größte Phasenverschiebung erfährt die im Punkt B emittierte Welle: $\Delta = 2\pi d/\lambda$, wobei gilt: $d = b \sin \varphi$. Die Phasendifferenz zweier Streifen ist also $\delta = 2\pi d/(p\lambda)$. Summiert man nun die Beiträge der einzelnen Streifen auf, so ist die resultierende Feldstärke in Richtung φ :

$$E_\varphi \sim \text{Re } \beta e^{i(kl - \omega t)} (1 + e^{-i\delta} + e^{-i2\delta} + \dots + e^{-i(p-1)\delta}) \quad (2)$$

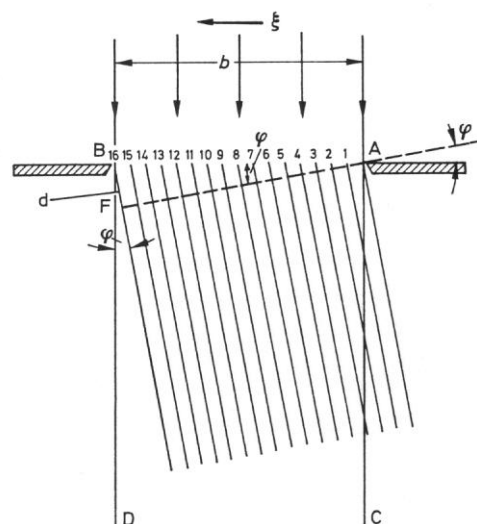


Abb. 7.2: Zur Lichtbeugung an einem Spalt

Für die geometrische Reihe in der Klammer gilt: $(\sin p \delta/2)/(\sin \delta/2) e^{-i[(p-1)/2] \delta}$. Mit $\Delta = p \delta$ folgt:

$$E_{\varphi} \sim \operatorname{Re} \beta e^{i(kl - \omega t)} [\sin \Delta/2]/[\sin (\Delta/2p)] e^{-i \Delta/2} \cdot e^{-i \Delta/2p} \quad (3)$$

Verfeinert man die Streifeneinteilung, d. h. p wird sehr groß, so läßt sich der Sinus durch sein Argument ersetzen und eine e -Funktion geht gegen 1. Dann folgt:

$$\begin{aligned} E_{\varphi} &\sim \operatorname{Re} \beta p e^{i(kl - \omega t - \Delta/2)} (\sin \Delta/2)/(\Delta/2) \\ &= b [\sin \Delta/2/(\Delta/2)] \cos (kl - \omega t - \Delta/2) \end{aligned}$$

Quadrieren und Mittelung über die Zeit liefert die Intensität I_{φ} in Richtung φ :

$$I_{\varphi} \sim b^2 \sin^2[(\pi b/\lambda) \sin \varphi]/[(\pi b/\lambda) \sin \varphi]^2 \quad (4)$$

Maxima

$$\sin \varphi = 0, \quad I_0 \sim b^2$$

$$\sin \varphi = 3\lambda/2b, \quad I = 0,045 I_0$$

Minima

$$\sin \varphi = \lambda/b, \quad 1. \text{ Minimum}$$

$$\sin \varphi = 2\lambda/b, \quad 2. \text{ Minimum}$$

Die Intensitätsverteilung ist als Funktion von $\sin \varphi$ in Abb. 7.3 dargestellt. Für große Spaltbreiten, $b \gg \lambda$, wird das Hauptmaximum schmal. Entspricht die Spaltbreite jedoch der Wellenlänge oder gilt $\lambda \ll b$, so wird das Hauptmaximum sehr breit. Dies sieht man auch im Ausdruck (4) mit $b/\lambda \ll 1$, so daß $I_{\varphi} \sim b^2$, unabhängig vom Winkel φ , d. h. vom Spalt breitet sich eine Kugelwelle aus.

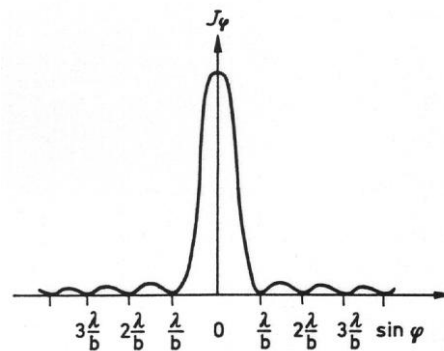


Abb. 7.3: Intensitätsverteilung bei der Beugung monochromatischen Lichtes an einem Spalt

Beugung an einer kreisförmigen Öffnung

Entsprechend Abb. 7.2 fällt Licht auf eine kreisförmige Öffnung vom Radius R . Als Lichtquelle werde ein leuchtender Punkt benutzt. Für senkrecht einfallendes Licht ergibt sich in ähnlicher Weise wie vorher für die gebeugte Intensität I_{φ} unter dem Winkel φ :

$$I_{\varphi} \sim J_1^2 [(2 \pi/\lambda) R \sin \varphi]/[(2 \pi/\lambda) R \sin \varphi]^2 \quad (5)$$

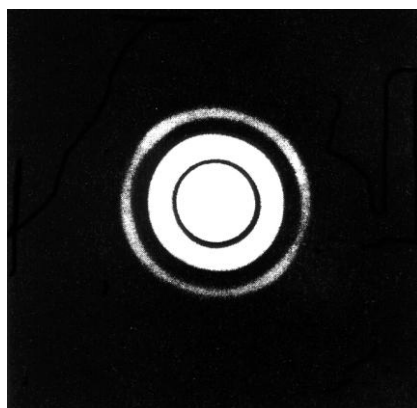


Abb. 7.4: Airy-Ringe; Durchmesser der Öffnung 1,0 mm

Hierbei steht J_1 für die Besselfunktion 1. Ordnung (tabelliert z. B. in Abramowitz, Stegun, Handbook of Math. Functions). Wie beim Spalt ergeben sich Beugungsfiguren (rotationssymmetrisch, Symmetriegründe) mit Minima und Maxima der Intensität (vgl. Abb. 7.4, Beugungsringe, Lochdurchmesser 1 mm).

Die Abbildung der Beugungsfigur erfolgt wieder mit einer Linse der Brennweite f . Die Radien der dunklen Ringe (Minima) sind:

$$r_1 = 0,61 \lambda f / R ; \quad r_2 = 1,116 \lambda f / R ; \quad r_3 = 1,619 \lambda f / R \quad (6)$$

Auflösungsvermögen optischer Instrumente

Ohne Beugung könnte jede Abbildung durch optische Instrumente beliebig scharf begrenzt sein. Tatsächlich ergeben sich jedoch durch kreisförmige Blenden bei abbildenden Systemen unscharfe Bildränder. Zwei Objektpunkte gelten dann noch als getrennt wahrnehmbar, wenn das Maximum eines Beugungsbilds gerade mit dem 1. Minimum des anderen Bilds zusammenfällt (vgl. Abb. 7.5 und Abb. 7.6).

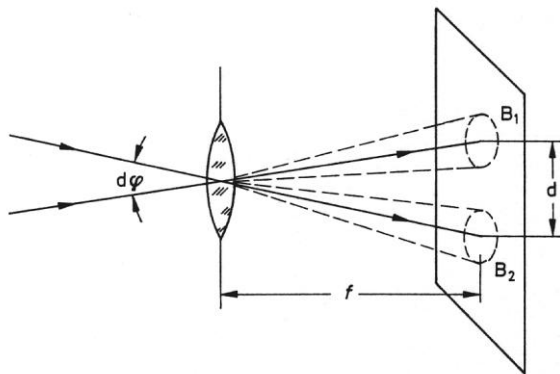


Abb. 7.5: Zur Auflösung zweier Objektpunkte

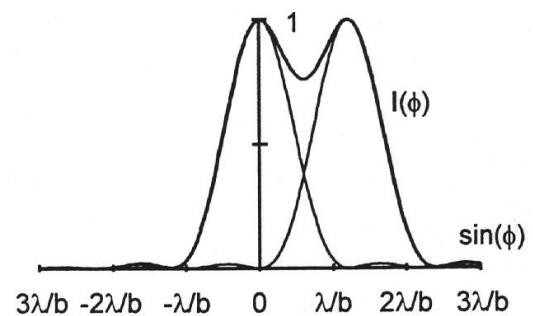


Abb. 7.6: Beugung Kreisblende

Für die Winkeldistanz $d\phi$, bei der zwei Objektpunkte noch als getrennt wahrnehmbar sind (vgl. Abb. 7.5) gilt dann mit dem Radius des 1. Minimums in (6):

$$d\phi = d/f = r_1/f = 1,22 \lambda / D \quad (7)$$

Hierbei ist D der Durchmesser der beugungsbegrenzenden Blende. Der Kehrwert heißt auch das Auflösungsvermögen U :

$$U = 1/d\phi = 0,82 D / \lambda$$

Beugungsgrenzen treten bei allen optischen Instrumente auf. Außer einem konstanten Faktor k , der charakteristisch für das jeweilige Gerät ist, gilt sowohl für Fernrohr, Mikroskop, Projektionsapparat.... $U \sim D/\lambda$. Hieraus lässt sich sofort ableiten, wie das Auflösungsvermögen verbessert werden kann:

- möglichst große Linsen/Blendendurchmesser D verwenden,
- möglichst kleine Wellenlänge λ nutzen.

Beugungsgitter

Werden bei einer beugenden Öffnung anstatt einem Spalt mehrere Spalte der Breite b jeweils im Abstand s eingefügt, so verändert sich das Beugungsbild entsprechend Abb. 7.7 (Anzahl der Spalte p : 2, 4 und 8).

Nach ähnlicher Rechnung wie vorher ergibt sich die Intensitätsverteilung unter dem Winkel ϕ nun mit einem Term, der von dem Einzelspalt der Breite b herrührt, sowie einem Term, der durch p Spalten entsteht (geschweifte Klammern im Ausdruck (8)):

$$I_\phi \sim \underbrace{\left\{ \sin^2 \left[\left(\frac{\pi b}{\lambda} \right) \sin \phi \right] / \left[\left(\frac{\pi b}{\lambda} \right) \sin \phi \right]^2 \right\}}_{b \text{ - Term}} \underbrace{\left\{ \sin^2 \left[\left(p \frac{\pi b}{\lambda} \right) \sin \phi \right] / \left[\left(p \frac{\pi b}{\lambda} \right) \sin \phi \right]^2 \right\}}_{p \text{ - Term}} \quad (8)$$

$$\text{Hauptmaxima unter den Winkeln:} \quad \sin \phi_k = k \lambda / s \quad k = 0, 1, 2, 3... \quad (9)$$

Die Beugungsmaxima sind umso intensiver und schmaler, je größer die Zahl der beugenden Öffnungen ist.

Die Abstände der Maxima sind von der Wellenlänge abhängig. Beugungsgitter sind die gebräuchlichsten Hilfsmittel für die Spektroskopie.

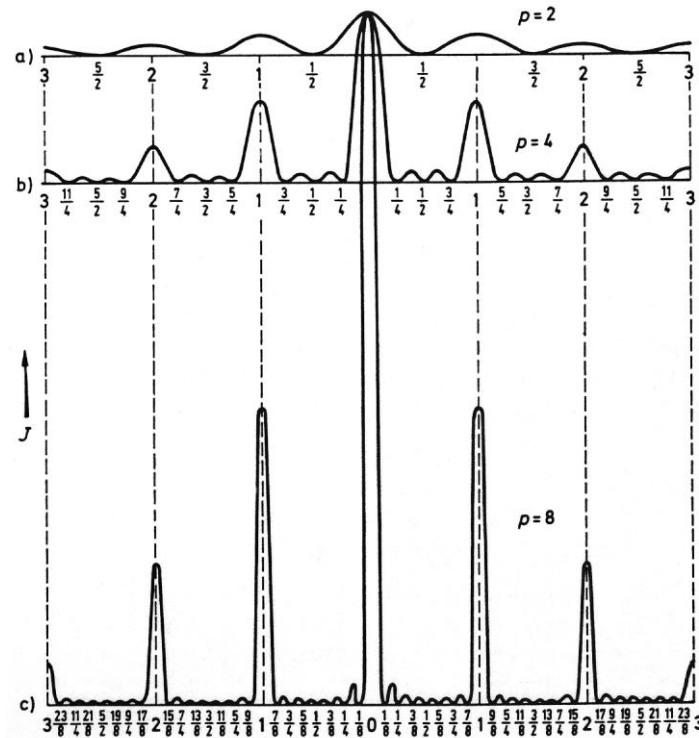


Abb. 7.7: Intensitätsverteilung (qualitativ) bei: a) 2, b) 4 und c) 8 Spalten

Beispiel

Ein Gitter habe die Gitterkonstante $s = 2,5 \mu\text{m}$. Der sichtbare Wellenlängenbereich liegt zwischen $0,4 \mu\text{m}$ (violett) und $0,75 \mu\text{m}$. Es sollen die Beugungswinkel für die ersten drei Ordnungen berechnet werden:

$k = 1:$	$\varphi_{\text{rot}} = 17,5^\circ$	$\varphi_{\text{violett}} = 9,2^\circ$	$\varphi_{\text{rot}} - \varphi_{\text{violett}} = 8,3^\circ$
$k = 2:$	$\varphi_{\text{rot}} = 36,9^\circ$	$\varphi_{\text{violett}} = 18,7^\circ$	$\varphi_{\text{rot}} - \varphi_{\text{violett}} = 18,7^\circ$
$k = 3:$	$\varphi_{\text{rot}} = 64,2^\circ$	$\varphi_{\text{violett}} = 28,7^\circ$	$\varphi_{\text{rot}} - \varphi_{\text{violett}} = 33,5^\circ$

Man sieht, daß die Gitterkonstante gerade klein genug ist, um die 1. und die 2. Ordnung des Spektrums noch zu trennen. Im Gegensatz zum Prismenspektrum gibt es beim Gitter zwei gravierende Unterschiede:

- der langwellige Anteil wird stärker als der kurzwellige Anteil abgelenkt,
- je größer die Ordnung des Gitters, desto größer der Winkelbereich für die Farben,
- die einzelnen Farben werden proportional zur Wellenlänge abgelenkt.

Spektrales Auflösungsvermögen

Gefragt ist, welcher Wellenlängenunterschied $\delta\lambda$ sich bei einer Wellenlänge λ noch erkennen läßt. Man bezeichnet deshalb $\lambda/\delta\lambda$ als das Auflösungsvermögen eines Gitters.

Wie wir wissen, werden die Hauptmaxima bei einem Gitter um so schmaler, je größer die Anzahl der Beugespalte p ist. Außerdem wächst die Länge des Beugungsspektrums mit der Ordnung k . Die Rechnung zeigt (z. B. [2]):

$$\text{Auflösungsvermögen Gitter:} \quad \lambda/\delta\lambda = p k \quad (10)$$

Bei sehr feinen Gittern erreicht die Anzahl der Beugespalte $p = 10^5$ (600 Linien/mm, Gitterbreite 165 mm). Man beobachtet typisch in 2. oder 3. Ordnung, so daß das Auflösungsvermögen bis 300.000 betragen kann.

Wie vergleichen sich Gitter und Prisma bezüglich des Auflösungsvermögens? Wir hatten festgestellt, daß beim Prisma die Änderung des Brechungsindex mit der Wellenlänge (Dispersion), d. h. $dn/d\lambda$ von entscheidendem Einfluß auf die Farbtrennung ist. Weiterhin ist die Basisbreite t des Prismas von Bedeutung für das Auflösungsvermögen, da die Basisbreite gleichzeitig die Prismenhöhe festlegt und damit eine effektive Blendenöffnung (Beugung!) bestimmt. Für die Auflösung des Prismas gilt der Ausdruck (z. B. [2]):

$$\lambda/\delta\lambda = t \, dn/d\lambda \quad (11)$$

Ausschließlich für den Gebrauch in Vorlesungen und Übungen !

Die Basisbreite t kann schon aus praktischen Gründen (Größe !) nicht beliebig breit werden. Auch $dn/d\lambda$ ist nicht beliebig groß. Praktische Werte bei 500 nm: Flintglasprisma $n = 1,76$, $t = 10$ cm, $dn/d\lambda = 1730 \text{ cm}^{-1}$, Auflösungsvermögen $\lambda/\delta\lambda = 17.300$.

Damit wird deutlich, daß für den Bereich des sichtbaren Lichts Beugungsgitter vorzuziehen sind.

Herstellung von Gittern: Einritzen von Strichen mit Diamant in Glas oder spiegelnde Flächen.
Neuerdings: holographische Gitter, Replikation durch Prägen.

Bei den normalen Beugungsgittern (Reflexion und Transmission) ist allerdings die Energieverteilung ungünstig, da die einfallende Lichtmenge auf mehrere Ordnungen (Richtungen) aufgeteilt wird. Günstiger sind dabei Echelette-Gitter (vgl. Abb. 7.8), bei denen durch geeignete Wahl der Furchenform das Licht auf **eine** Beugungsordnung konzentriert werden kann.

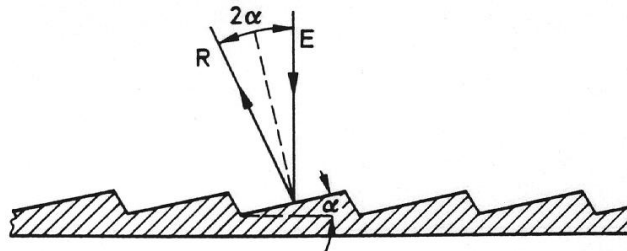


Abb. 7.8: Geblaztes Gitter (Blaze-Gitter, Echelette-Gitter) nach R. W. Wood (1910)

Einsatzgebiete von Gittern

Gitter werden überall dort benötigt, wo die spektrale Zerlegung des Lichts von Bedeutung ist. Dies sind z. B.: Spektrometer, Wellenlängenmultiplexer, Gas- und Schadstoffsensoren. Außerdem in Weg- und Geschwindigkeitsmessern.

Der dynamische Aufbau von Beugungsgittern (Ultraschallwellen erzeugen stehende Wellen und damit Dichteschwankungen in Quarzglas) wird genutzt, um Laserlicht abzulenken und entsprechend der angelegten Ultraschallfrequenz zu modulieren.

8. Sphärische Linsen

Linsen sind durchsichtige Körper mit dem Brechungsindex n , die beidseitig von Kugelflächen (auch plan) begrenzt sind. Abb. 8.1 zeigt in der oberen Reihe Sammellinsen, in der unteren Reihe Zerstreuungslinsen. Dünne Linsen sind eine Idealisierung realer Linsen. Bei ihnen ist die Mittendicke klein gegen Brennweite, Gegenstandsweite und Bildweite.

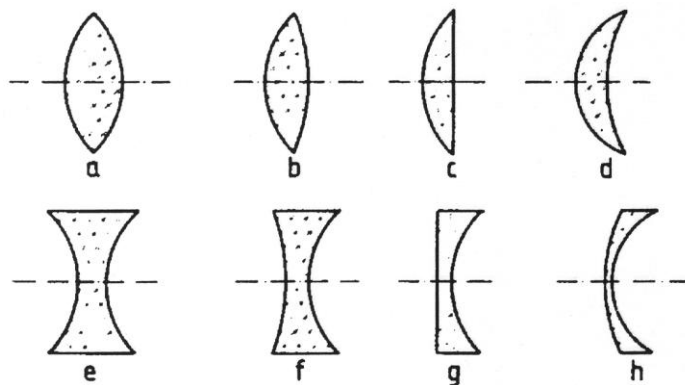


Abb. 8.1: Verschiedene Linsenformen: Obere Reihe Sammellinsen; Untere Reihe Zerstreuungslinsen

Linsengleichung

Zur Ableitung der Linsengleichung werde zunächst die Wirkung **einer** brechenden Kugelfläche betrachtet. In Abb. 8.2 trifft ein von G (Gegenstand) unter dem Winkel σ_1 zur optischen Achse gerichteter Lichtstrahl im Punkt E auf eine Kugelfläche (Radius R). Der Lichtstrahl wird dann im optisch dichteren Medium mit dem

Brechungsindex n nach B abgelenkt. Der Winkel des einfallenden Strahls zum Lot ist ε_1 , der Winkel des durchgehenden Strahls zum Lot ist ε_2 . Es gelten die Winkelrelationen:

$$\varepsilon_1 = \varphi + \sigma_1 \quad \varepsilon_2 = \varphi - \sigma_2 \quad (1)$$

Mit dem Brechungsgesetz: $n_1 \sin \varepsilon_1 = n_2 \sin \varepsilon_2$, kleinen Winkeln ε sowie $n_1 = 1$ (Luft) ergibt sich $\varepsilon_1 = n_2 \varepsilon_2$ und mit (1):

$$\varphi + \sigma_1 = n_2 (\varphi - \sigma_2) \quad \text{oder} \quad \sigma_1 + n_2 \sigma_2 = (n_2 - 1) \varphi \quad (2)$$

Gleichermaßen wird gesetzt ($h \ll R$) $\sigma_1 \approx h/g$ $\sigma_2 \approx h/b$ $\varphi \approx h/R$
(3)

Wenn die Bedingung (3) ohne Fehler gilt, spricht man vom achsennahen oder paraxialen Gebiet (nach C. F. Gauß).

Eingesetzt in (2) und mit $n_2 = n$ folgt hieraus:

$$1/g + n/b = (n - 1)/R \quad (4)$$

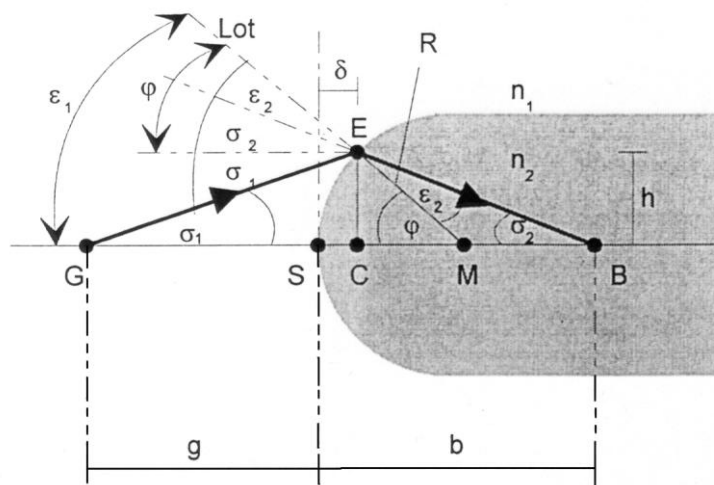


Abb. 8.2: Brechung eines Lichtstrahls an einer sphärisch gekrümmten Fläche

Mit einer ähnlichen Betrachtung (z. B. [2]) erhält man die Abbildungsgleichung für **beide** Kugelflächen (Radien R_1, R_2), die auch als Linsengleichung in paraxialer Näherung bekannt ist:

$$1/g + 1/b = (n - 1)(1/R_1 - 1/R_2) \quad (5)$$

Trifft ein achsenparalleler Strahl auf die Linse, d. h. $g = \infty$, so schneidet dieser Strahl die optische Achse auf der Bildseite im Brennpunkt F, d. h. $b = f$. Die Brennweite dünner Linsen läßt sich dann ausdrücken:

$$f = (n-1)^{-1} R_1 R_2 / (R_2 - R_1) \quad (6)$$

Allerdings darf man nicht den Fehler begehen und bei einer Bikonvexlinse $R_1 = R_2$ zu setzen, um sodann nach der Bedeutung des Ausdrucks (6) zu fragen. Tatsächlich ist dabei R_2 mit einem negativen Wert einzusetzen (Vorzeichenkonventionen siehe [2]), so daß bei $|R_1| = |R_2|$ folgt $f = R/[2(n-1)]$.

Mit (6) läßt sich die Linsengleichung (5) vereinfachen:

$$1/g + 1/b = 1/f \quad (7)$$

Die Bildkonstruktion ist in Abb. 8.3 für eine bikonvexe dünne Linse dargestellt. Zur besseren Übersicht wird folgende Darstellungsweise gewählt: objektseitige Größen Index o, bildseitige Größen Index i (image).

Beispiel

Photoapparat, Brennweite der Linse $f = 50$ mm, Objektweite $x_o = 500$ mm. Das Bild ist in $x_i = 55,6$ mm. Zur Scharfeinstellung muß also die Linse auf das Objekt zu bewegt werden.

Die (transversale) Vergrößerung ist definiert als

$$M_T = y_i/y_o \quad (8)$$

Aus Abb. 8.3 liest man leicht ab, daß gilt: $M_T = y_i/y_o = s_i/s_o = x_i/f = f/x_o$ (9)

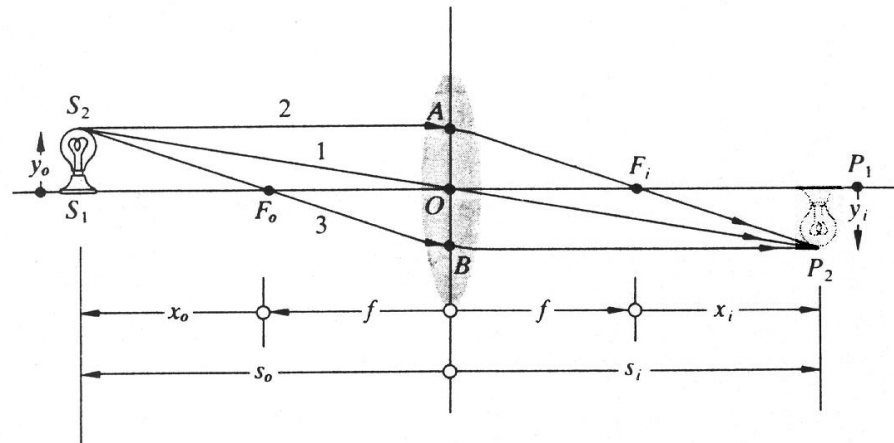


Abb. 8.3: Objekt- und Bildlage bei einer dünnen Linse

Dicke Linsen

Kann die Linsendicke gegenüber den anderen Abmessungen des Systems nicht mehr vernachlässigt werden, zerfällt die Mittelebene in zwei Hauptebenen. Brennweiten, Objekt- und Bildweiten werden von den jeweiligen Hauptebenen aus gemessen (vgl. Abb. 8.4). **Die Linsengleichung (7) gilt weiterhin.**

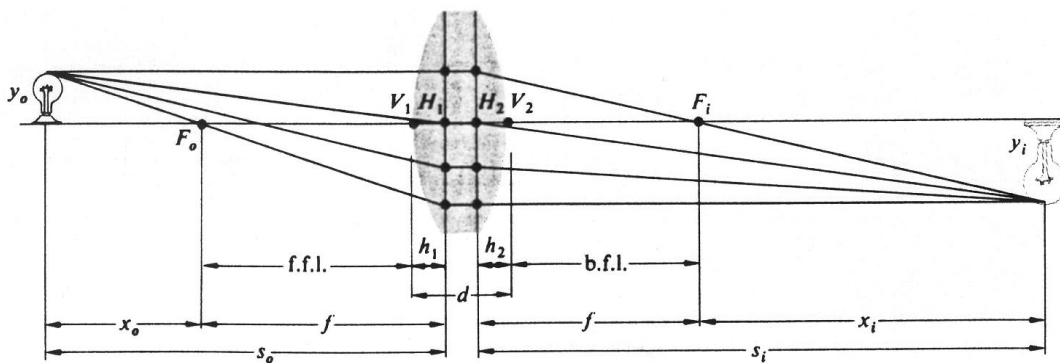


Abb. 8.4: Geometrie der dicken Linse

Die Brennweite der dicken Linse ist (siehe z. B. [2]):

$$1/f = (n - 1) [1/R_1 - 1/R_2 + (n - 1) d/(n R_1 R_2)] \quad (10)$$

Die Entfernung h_1, h_2 der Hauptebenen H_1, H_2 von den Scheiteln V_1, V_2 sind

$$h_1 = f (n - 1) d/(R_2 n) \quad h_2 = f (n - 1) d/(R_1 n) \quad (11)$$

Beispiel

Bikonvexlinse mit Radien $R_1 = 200$ mm, $R_2 = 300$ mm, Dicke der Linse $d = 12$ mm, Brechungsindex $n = 1,5$. Die Brennweite ergibt sich aus $1/f = 0,5 [1/200 + 1/300 - 0,5 \cdot 12/(1,5 \cdot 200 \cdot 300)]$ zu $f = 242$ mm. R_2 wurde wieder mit negativem Vorzeichen eingesetzt. Die Entfernung der Hauptebenen von den jeweiligen Scheiteln sind: $h_1 = 242 \cdot 0,5 \cdot 12/(300 \cdot 1,5) = 3,2$ mm und $h_2 = 242 \cdot 0,5 \cdot 12/(200 \cdot 1,5) = 4,8$ mm. Die Entfernung der Hauptebenen beträgt dementsprechend 4 mm.

Ein Objekt im Abstand in 400 mm Abstand vom Scheitel V_1 , weist dann tatsächlich einen Objektabstand von $s_o = 403,2$ mm von H_1 auf. Mit (7): $1/242 = 1/400 + 1/s_i$ folgt der Bildabstand H_2 zu $s_i = 612,6$ mm. Der Abstand des Bildes zum Scheitel beträgt allerdings nur 607,8 mm.

Linsensysteme

Sind mehrere Linsen hintereinander angeordnet, so bilden sie ein Linsensystem (z.B. Mikroskop, Fernrohr), dessen Gesamtwirkung durch Gesamtbrennweite und Lage der Hauptebenen charakterisiert werden kann.

Abb. 8.5 zeigt zwei Linsensysteme aus zwei dicken bikonvexen Linsen der Brennweiten f_1, f_2 im Abstand d (Tubuslänge). Die effektive Brennweite des Gesamtsystems beträgt (z. B. [2]):

Ausschließlich für den Gebrauch in Vorlesungen und Übungen !

$$1/f = 1/f_1 + 1/f_2 - d/(f_1 f_2) \quad (12)$$

Je nach Brechkraft der Linsen kann sich die bildseitige Hauptebene (H_2 in Abb. 8.5) innerhalb oder außerhalb der Linsenkombination befinden. Wenn die Linsen zusammenrücken ($d \rightarrow 0$) ergibt sich die gesamte Brechkraft einfach durch die Addition der einzelnen Brechkräfte.

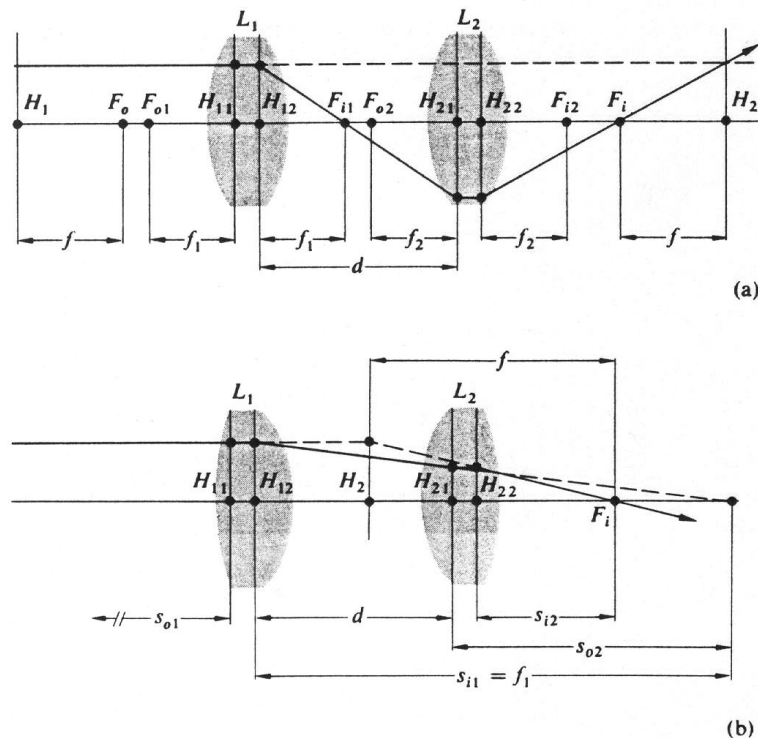


Abb. 8.5: Ein System dicker Linsen mit unterschiedlicher Lage der Hauptebenen

Abbildungsfehler von Linsen

Die Abbildungsgleichungen der Linsen wurden unter vereinfachenden Annahmen abgeleitet. Es ist deshalb nicht verwunderlich, daß sich Abweichungen (Aberrationen) ergeben, wenn wir den Gültigkeitsbereich des achsennahen Bereichs, der Gauß'schen Optik, verlassen. Dies gilt schon für monochromatisches Licht. Berücksichtigt man noch, daß der Brechungsindex von der Wellenlänge abhängt $n = n(\lambda)$, so wird deutlich, daß auch chromatische Aberrationen in Abhängigkeit der verschiedenen Lichtwellenlängen auftreten.

Monochromatische (Seidel'sche) Aberrationen

Sphärische Aberration

Strahlen, die in einem größeren Abstand zur Achse auftreffen, werden stärker fokussiert (Abb. 8.6). Prinzipiell ließe sich dieser Effekt durch Blenden einschränken. Allerdings geht hierbei Lichtintensität verloren. Aus der Beobachtung, daß die achsenfernen Strahlen zu stark gebrochen werden, läßt sich als Ausweg minimale Ablenkung (siehe Prismen) fordern (vgl. Abb. 8.7), die sich bei einer entsprechenden Stellung einer plankonvexen Linse realisieren läßt.

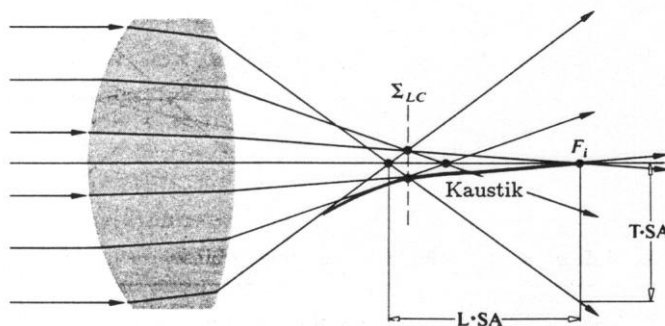


Abb. 8.6: Sphärische Aberration für eine Linse. Die Einhüllende der gebrochenen Strahlen nennt man eine Kaudik.

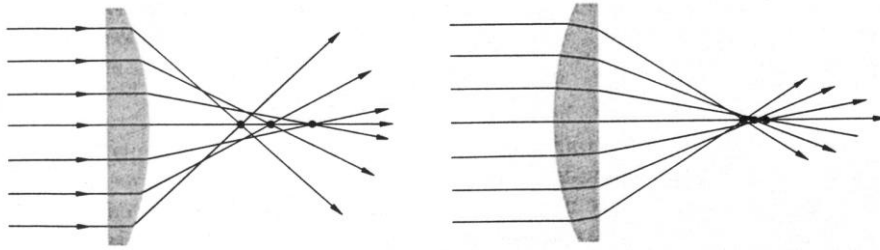


Abb. 8.7: Sphärische Aberration für eine plankonvexe Linse

Koma

Betrachtet man Strahlen, die parallel zum Hauptstrahl mit großem Abstand unter einem Winkel auf eine Sammellinse auftreffen (Abb. 8.8), so wird deutlich, daß die unterschiedlichen Auftreffwinkel zu sehr verschiedenen Ablenkungen führen. Es tritt keine Symmetrie zum Hauptstrahl auf. Dieser Fehler wird deshalb Asymmetriefehler oder Koma genannt.

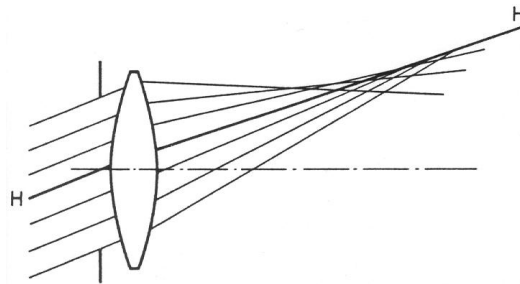


Abb. 8.8: Verlauf von Meridionalstrahlen endlicher Apertur gegenüber dem Hauptstrahl; Auftreten von Koma

Astigmatismus

Ist der Objektpunkt nicht auf der optischen Achse, so wird die Linse asymmetrisch getroffen (Abb. 8.9). Der Strahlenverlauf läßt sich durch zwei senkrechte Ebenen charakterisieren: die Meridionalebene und die Sagittalebene. Ein Objektpunkt wird in Abb. 8.10 als Linie scharf in der Meridionalebene **vor** der scharfen Abbildung in der Sagittalebene abgebildet. Dazwischen bildet sich ein kreisförmiger Fleck, der Unschärfenkreis aus. Astigmatismus ist ein Bildfehler, der schon bei achsennahen Strahlen auftritt.

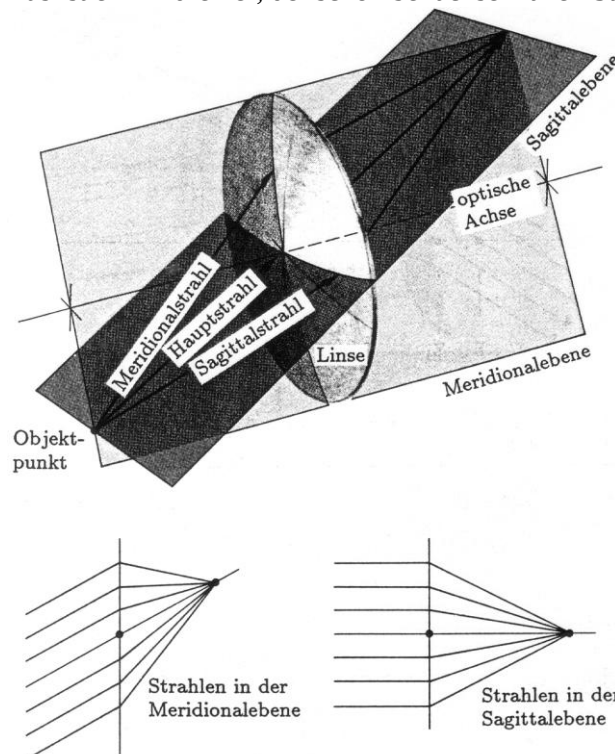


Abb. 8.9: Die Sagittal- und Meridionalebene

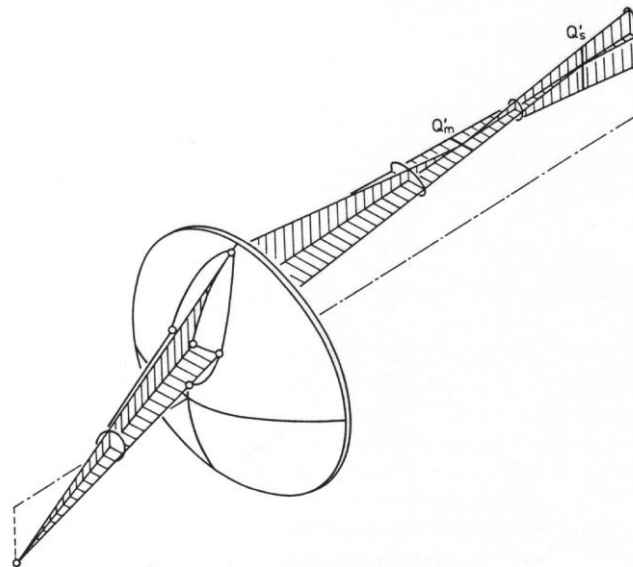


Abb. 8.10: Außeraxiale Abbildung in der Umgebung des Hauptstrahls bei endlichem Astigmatismus; Darstellung des Strahlenverlaufs

Bildfeldkrümmung

Wegen der sphärischen Form der Linse werden tatsächlich nur Kugelflächen einwandfrei abgebildet. Dies ist in Abb. 8.11 für eine Sammellinse dargestellt. Eine Zerstreuungslinse hat entgegengesetzt gewölbte Objekt- und Bildflächen. Daher lässt sich dieser Bildfehler, der das Bild außeraxial unscharf macht (auch Petzval-Bildfeldkrümmung) durch Linsenkombination korrigieren. Dies ist z. B. bei Projektions- und Photoobjektiven (gerade Bildebene) wichtig.

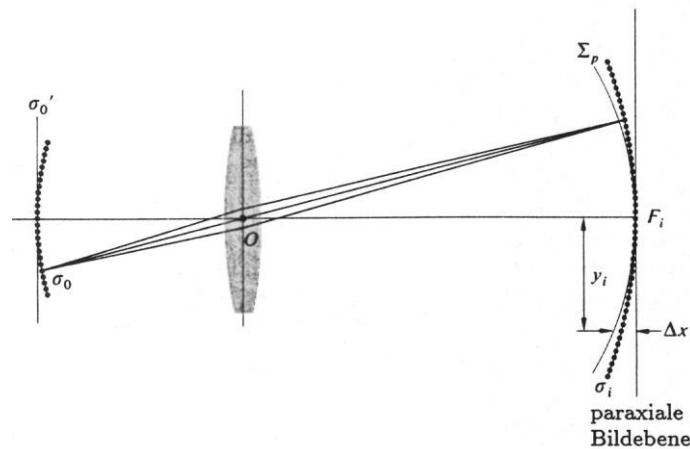


Abb. 8.11: Bildfeldkrümmung

Verzeichnung

Die transversale Vergrößerung hängt i. allg. vom Achsabstand der Objektpunkte ab. Daher kann eine Deformation des Bildes auftreten (tonnen-, kissenförmige Verzeichnung, vgl. Abb. 8.12).

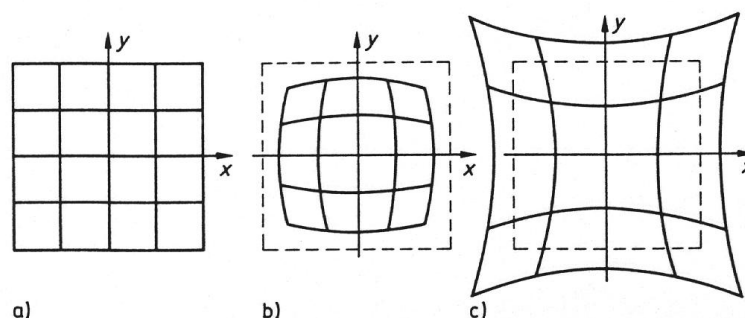


Abb. 8.12: a) Quadrat, b) tonnenförmige, c) kissenförmige Verzeichnung

Chromatische Aberration

Da sich der Brechungsindex als Funktion der Wellenlänge ändert, variieren, abhängig von der Wellenlänge des Lichts, die Brennweiten der Linsen (vgl. Abb. 8.13).

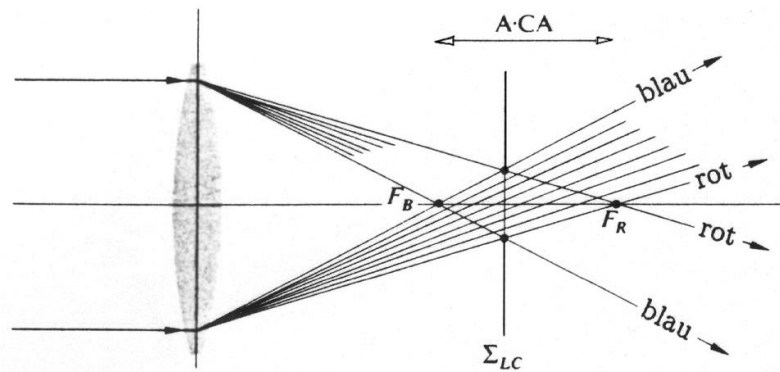


Abb. 8.13: Farbortsfehler (Farblängsfehler, Farbschnittweitenfehler)

Eine Korrektur der chromatischen Aberration lässt sich durch die Kombination von Sammell- und Zerstreuungslinsen erzielen. Allerdings gelingt dann die Korrektur i. allg. nicht für jede Farbe (vgl. Abb. 8.14).

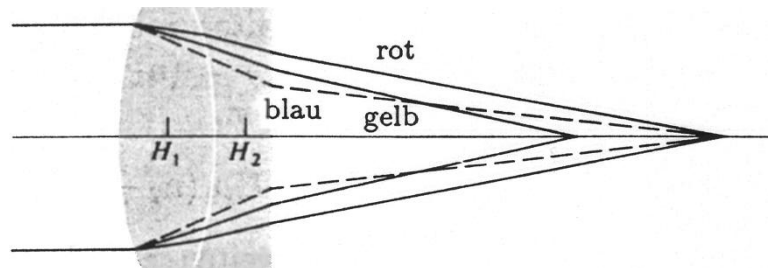


Abb. 8.14: ein zweiteiliger Achromat; der Verlauf der Strahlen wurde übertrieben gezeichnet

Optisches Glas

Materialien: Glas, Quarz, Steinsalz, Flußspat, inzwischen auch Polymerwerkstoffe

Glasherstellung: erschmelzen aus chemisch reinen Rohstoffen in Ton- oder Edelmetallgefäßen, danach wochenlange Abkühlung, Untersuchung auf Materialfehler, nochmaliges Erweichen in Schamottgefäßen zum Ausgleich innerer Spannungen, wiederum wochenlanger Abkühlprozeß, Qualitätsprüfung, dann Schleifen.

Wegen der Abhängigkeit des Brechungsindex von der Lichtwellenlänge (Dispersion), ist die Charakterisierung des Glases bei festen Wellenlängen (Spektrallinien einzelner Elemente) notwendig.

λ [nm]	404,7	435,6	486,1	587,6	656,3	768,2
Spektrallinie	h	g	F	d	C	A'
Element	Hg	Hg	H	He	H	He

Die Brechzahl n_d eines Glases wird meist für gelbes Licht (d-Linie) angegeben. Ein Maß für die Dispersion ist die Abbe'sche Zahl v_d , der Quotienten von $(n_d - 1)$ und der Brechzahldifferenz $n_F - n_C$ (486 nm - 656 nm):

$$v_d = (n_d - 1) / (n_F - n_C) \quad (13)$$

Je nach Glassorte bewegt sich der Brechungsindex n_d zwischen 1,45 (Kronglas) und 1,85 (Flintglas). Die Abbe'sche Zahl v_d liegt zwischen 70 und 25.

Zusammenfassung

Durch konstruktive Maßnahmen lassen sich Abbildungsfehler für das jeweilige zusammengesetzte System reduzieren. Hierzu werden anhand von Optimierungsroutinen die Radien der Linsen sowie deren Formen und Materialien variiert. Schließlich führt man noch Blenden an geeigneten Stellen ein.

9. Optische Systeme

Zur Charakterisierung von optischen Systemen (z. B. Mikroskop, Teleskop....) werden eine Reihe von Begriffen genutzt, die zum Verständnis der Funktionsweise sowie zum Systementwurf wichtig sind.

Blenden

Die Gesamtheit der zur Abbildung eines Objekts beitragenden Strahlen füllt den Strahlenraum aus. Abb. 9.1 zeigt eine einfache reelle Abbildung durch eine Sammellinse. Die Begrenzung des Strahlenraums erfolgt im vorliegenden Fall durch den Durchmesser der Linse 1 und die mechanische Blende 2.

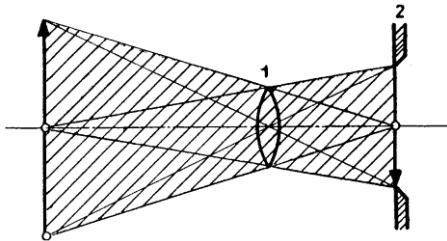


Abb. 9.1: Strahlenraumbegrenzung

Die **Aperturblende** begrenzt den Öffnungswinkel des bei der Abbildung wirksamen Strahlenbüschels. Die Aperturblende ist diejenige Blende eines optischen Systems, die vom axialen Objektpunkt aus unter dem kleinsten Winkel erscheint. Diese Begrenzung kann durch den Durchmesser einer Linse oder durch eine mechanische Blende erfolgen. Das Bild der Aperturblende vom Objektpunkt aus wird Eintrittspupille genannt. Abb. 9.2

zeigt die Begrenzung des Eintrittswinkels durch die Aperturblende. Da sich die Aperturblende in Abb. 9.2 innerhalb des bildseitigen Brennpunkts der Linse befindet, erscheint vom Objekt her gesehen ein virtuelles vergrößertes Bild der Aperturblende, die Eintrittspupille.

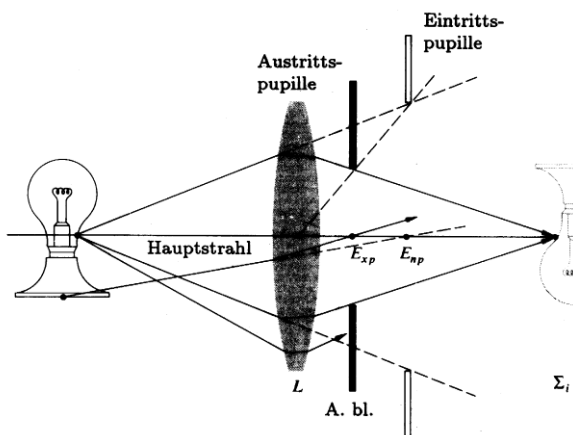


Abb. 9.2: Eintrittspupille

Der Öffnungswinkel, der das System verlassenden Strahlen, wird durch die Aperturblende bestimmt. Die Aperturblende oder deren Bild von der Bildseite her betrachtet heißt Austrittspupille. In Abb. 9.2 ist die Aperturblende gleichzeitig Austrittspupille. Sitzt die Aperturblende jedoch vor der Linse (vgl. Abb. 9.3), so erscheint die Austrittspupille als virtuelles vergrößertes Bild.

Die Zusammenhänge sind nochmals in Abb. 9.4 für einen komplexeren Fall dargestellt. Die Blende zwischen Sammel- und Zerstreuungslinse wirkt als Aperturblende. Deren Bilder sind, von der Objektseite her, die Eintrittspupille, von der Bildseite her, die Austrittspupille.

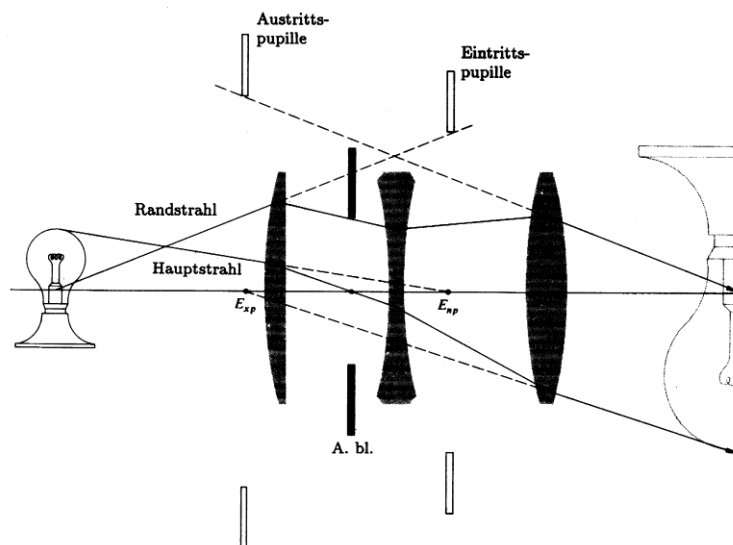


Abb. 9.3: Austrittspupille

Bei optischen Geräten zur direkten Beobachtung (Mikroskop, Teleskop) befindet sich die Austrittspupille gerade am Auge des Beobachters. Nachtgläser haben Austrittspupillen von etwa 8 mm (die Irisblendenöffnung des menschlichen Auges variiert je nach Lichtintensität zwischen 2 - 8 mm Ø).

Blendenzahl einer Linse: Verhältnis von Brennweite f und Durchmesser D ($f/\#$, engl. f-number). Erinnern wir uns an die Beugungsscheiben, die aufgrund der Wellennatur des Lichts an runden Öffnungen entstehen (vgl. Abschnitt 7).

Der Durchmesser des 1. Minimums ist $d = 2,44 \lambda f/D$ oder $d = 2,44 \lambda f/\#$. Dies bedeutet, daß der kleinste erreichbare Strahldurchmesser nicht nur durch die Brennweite der Linse, sondern auch durch deren Durchmesser entsprechend f/D bestimmt wird. Allerdings sind auch immer Linsenfehler zu berücksichtigen.

Beispiele:

$\lambda = 0,5 \mu\text{m}$, $D = 5 \text{ mm}$, $f = 10 \text{ mm} \Rightarrow f/\# = 2$; der beugungsbegrenzte Strahlfleck ist $d = 2,4 \mu\text{m}$ (84 μm).

$\lambda = 0,5 \mu\text{m}$, $D = 2 \text{ mm}$, $f = 10 \text{ mm} \Rightarrow f/\# = 5$; $d = 6,1 \mu\text{m}$ (5,4 μm).

Zum Vergleich: Die Strahlfleckgröße aufgrund der sphärischen Aberration ist $: 0,067 f/f/\#^3$. Die hieraus folgenden Werte sind bei den Beispielen in Klammern angegeben.

Numerische Apertur: Sie charakterisiert den maximalen Strahlwinkel θ_{max} , der durch die Aperturblende festgelegt wird (vgl. Abb. 9.4). $NA = n \sin \theta_{\text{max}}/2$. Für kleine Winkel gilt: $NA = \theta_{\text{max}}/2$ oder $f/\# = 1/(2 NA)$. Die numerische Apertur NA ist eine Größe, die den Öffnungswinkel eines Strahlkegels charakterisiert. Sie wird uns noch häufig begegnen, z. B. bei Glasfasern.

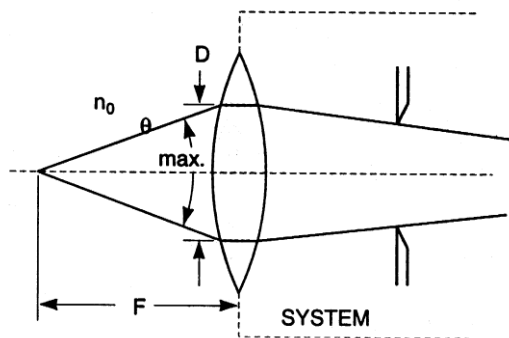


Abb. 9.4: Numerische Apertur

Beispiel: Eine Glasfaser soll über eine Linsenanordnung verlustfrei in eine andere Glasfaser eingekoppelt werden (Abb. 9.5). Der lichtführende Glasfaserdurchmesser beträgt $8 \mu\text{m}$, die NA der Glasfaser ist 0,15. Wellenlänge $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$. Wegen $n = 1$ und dem kleinen Öffnungswinkel gilt $f/\# = 1/(2 NA) = 3,3$. Zur Auswahl der Linse sei noch angeführt, daß jeder Linsenfehler mit zum Strahldurchmesser beiträgt. Um den Beitrag der sphärischen Aberration kleiner als $8 \mu\text{m}$ zu halten muß gelten: $0,067 f / f/\#^3 < 0,008 \text{ mm}$, d. h. $f < 4,3$

mm. Wählt man z. B. $f = 3 \text{ mm}$, so ergibt sich ein Strahlfleckdurchmesser auf der Linse von $0,9 \text{ mm}$. Die Intensitätsverteilung folgt einer Gaußverteilung, so daß der Linsendurchmesser doppelt so groß sein sollte.

Anmerkung: die Linsenkonfiguration in Abb. 9.5 ist so gehalten, daß die sphärische Aberration klein bleibt.

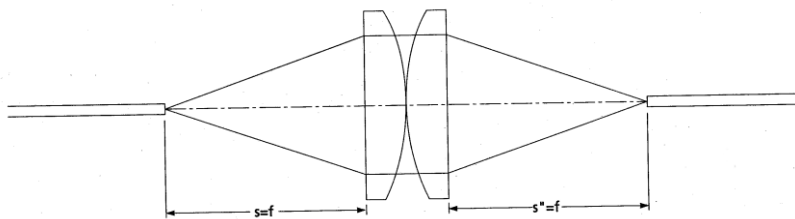


Abb. 9.5: Faser – Faser - Kopplung

Lupe

Das Auge sieht einen Gegenstand bis zum Nahpunkt d scharf (etwa 250 mm bei Normalsichtigen). Der Öffnungswinkel ist $\alpha = y/d$ (vgl. Abb. 9.6 a).

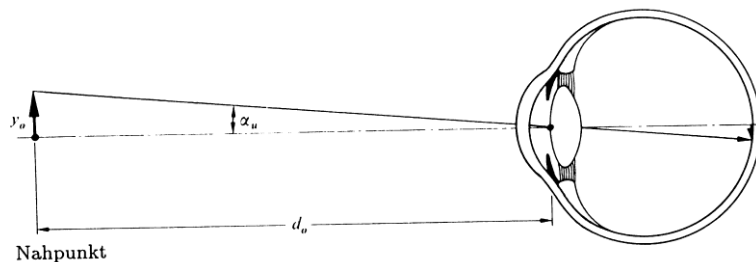
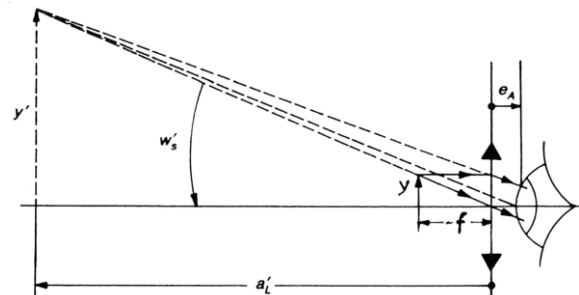


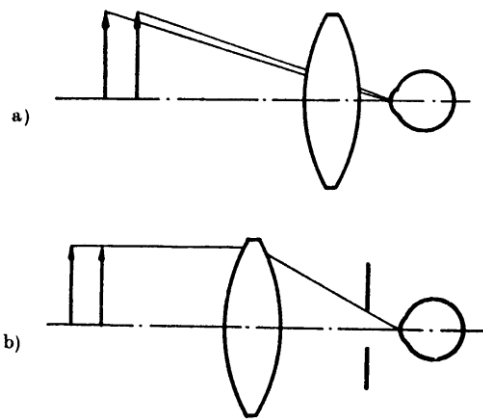
Abb. 9.6 a: Gegenstand ohne Lupe am Nahpunkt

Eine Lupe dient der Vergrößerung des Gegenstands, wobei damit der Gegenstand unter einem größeren Winkel w_s wahrgenommen wird. Der Quotient $\Gamma = \sigma/\alpha$ heißt Vergrößerung.

Abb. 9.6 b: Gegenstand im Brennpunkt der Lupe

In Abb. 9.6 b befindet sich der Gegenstand im Brennpunkt der Lupe, das Bild im Unendlichen. Für das Auge erscheint es in der Bezugssehweite 250 mm . Für den Winkel liest man ab (kleine Winkel): $w_s = y/f$. Als Vergrößerung ergibt sich: $\Gamma = y d / (f y) = 250/f$. Dieser Ausdruck wird als Lupenvergrößerung bezeichnet. In der Praxis ist diese Vergrößerungsangabe allerdings nur bedingt richtig und hängt vom Beobachter ab, z. B. bei Augenfehlern oder einem größeren Abstand von Auge und Lupe.





Zur Vermessung kleiner Gegenstände bringt man häufig Maßstäbe mit diesem in eine Ebene. Anhand der Maßstabsteilung möchte man die laterale Abmessung des Objekts bestimmen. Falls sich gleich große Gegenstände nicht exakt in einer Ebene befinden, erscheinen sie für den Beobachter unter verschiedenen Sehwinkeln, so daß ihre virtuellen Bilder verschieden groß sind (Abb. 9.7 a). Abhilfe schafft der telezentrische Strahlengang, bei dem sich im augenseitigen Brennpunkt der Lupe eine Blende befindet (Abb. 9.7 b). Gleich große Abschnitte erscheinen unabhängig von ihrer Lage unter gleichem Sehwinkel.

Abb. 9.7: Telezentrischer Strahlengang

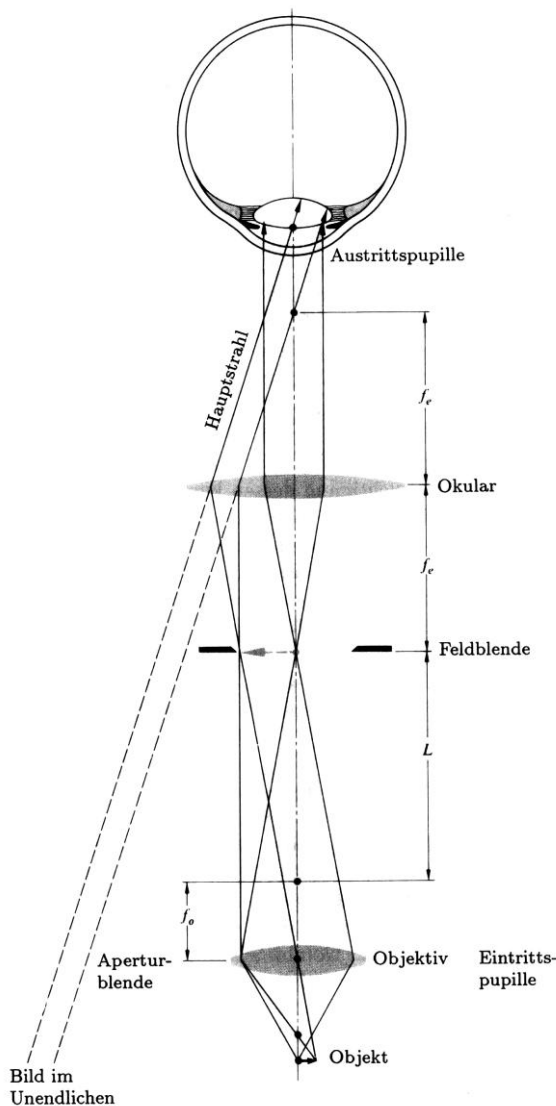
Mikroskop

Das in Abb. 9.8 gezeigte Mikroskop (vereinfacht) entwirft mit dem Objektiv ein reelles Zwischenbild des Objekts im Brennpunkt des Okulars, so daß hierdurch eine nochmalige Vergrößerung erfolgt. Die Gesamtvergrößerung ist deshalb das Produkt $\Gamma = \Gamma_{Ob} \Gamma_{Ok}$. Wir erinnern uns, daß gilt: $y_i/y_o = L/f_{Ob}$, d. h. $\Gamma_{Ob} = L/f_{Ob}$. Bei den meisten Herstellern ist der Abstand L genormt mit $L = 160$ mm und heißt Tubuslänge. Die Okularvergrößerung ist wieder $\Gamma_{Ok} = 250/f_{Ok}$. Die Gesamtvergrößerung ist dann:

$$\Gamma = \Gamma_{Ob} \Gamma_{Ok} = L \cdot 250 / (f_{Ob} f_{Ok}) \quad (9.1)$$

Auf einem Objektiv der Brennweite $f_{Ob} = 40$ mm ist deshalb 4x eingraviert. Kombiniert mit einem 10x Okular ergibt sich dann eine Mikroskopvergrößerung von $\Gamma = 40$. Sowohl Objektiv als auch Okular sind zur Korrektur von Bildfehlern weitaus komplexer gestaltet, als hier dargestellt.

Abb. 9.8: Strahlengang Mikroskop (vereinfacht)

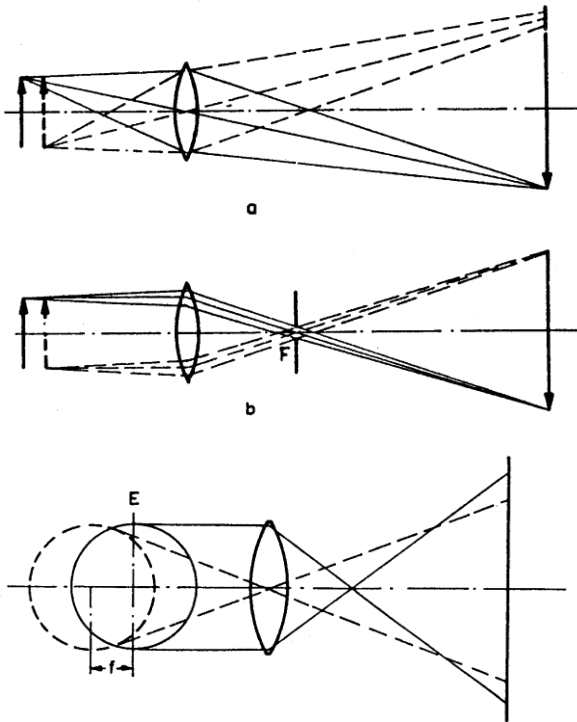


Auflösungsvermögen Mikroskop

Da der Objektivdurchmesser die Aperturblende bildet, stellt dies die beugungsbegrenzende Blende dar, die das Auflösungsvermögen des Mikroskops bestimmt. Wir sahen in Abschnitt 7, daß aufgrund der Wellennatur des Lichts zwei Objektpunkte noch unterscheidbar sind, wenn sie in einem Abstand $d = 1,22 \lambda / (2 NA)$ angeordnet sind. Um eine hohe Auflösung zu erzielen, sollte also die numerische Apertur $NA = n \sin \theta$ möglichst groß sein. Befindet sich das Objektiv in Luft ($n = 1$), kann NA höchstens den Wert 1 annehmen, so daß bei einer Wellenlänge $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ Details des Objekts von $d = 0,3 \mu\text{m}$ noch erkennbar sind. Wie weit ist es nun sinnvoll, die Vergrößerung eines Mikroskops hochzutreiben? Da das Auge Sehwinkel von $\varepsilon = 2$ Bogenminuten ($6 \cdot 10^{-4}$) noch unterscheiden kann, läßt sich zeigen, daß aufgrund der Beugungsbegrenzung durch das Objektiv sowie dem minimalen Sehwinkel des Auges es nicht sinnvoll ist, die Vergrößerung eines Mikroskops beliebig groß zu wählen.

Die Größe des Zwischenbilds von d im Brennpunkt des Okulars ist: $d_B = d \Gamma_{Ob}$. Dieses Zwischenbild muß mindestens einem Sehwinkel von $\varepsilon = d_B/f_{Ok}$ entsprechen,

damit es für das Auge erkennbar ist. Hieraus folgt: $\Gamma_{Ok} = 250/f_{Ok} = 250 \varepsilon/d_B$, mit $\Gamma_{Ob} = d_B/d$ sowie $\Gamma = \Gamma_{Ob} \Gamma_{Ok}$ folgt $\Gamma = 250 \varepsilon/d = 500$ als sinnvoll nutzbare Vergrößerung. Bei kürzeren Wellenlängen und einer größeren numerischen Apertur (z. B. Objekt in Ölimmersion mit $n > 1$), ist die sinnvolle Vergrößerung des Mikroskops: 500 - 1000.



Für Meßzwecke von Bedeutung ist das Mikroskop mit **telezentrischem** Strahlverlauf am Objektiv (vgl. Abb. 9.9 a, b). Hier ist im Fokus des Okulars eine Blende aufgestellt, so daß die Bilder zweier Objekte mit unterschiedlichen Höhen, aber gleichen lateralen Abmessungen gleich groß erscheinen.

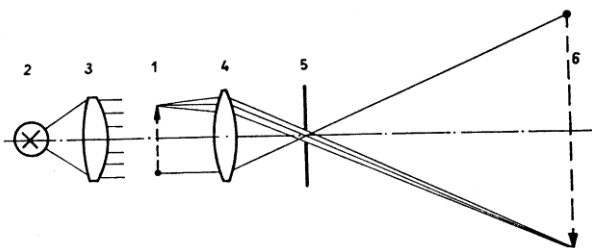
Abb. 9.9 a,b: Wirkung des telezentrischen Strahlengangs

Wie wichtig der telezentrische Strahlengang für die Messtechnik ist, zeigt Abb. 9.10. Bei der Messung des Durchmessers dünner Drähte ergibt sich im telezentrischen Strahlengang automatisch der Durchmesser des Zylinders, wohingegen bei einem normalen Mikroskop die Scharfeinstellung auf einen davorliegenden Ort erfolgt.

Abb. 9.10: Messung Drahtdurchmesser

Bestimmung lateraler Abmessungen

Zur Vermessung lateraler Abmessungen an kleinen Strukturen lassen sich **Meßmikroskope** nutzen, bei denen das Objekt mittels x-y-Feintrieben lateral auf dem Objektisch bewegt wird. Die jeweilige Distanz lässt sich an einer Messschraube oder einem elektronischen Anzeigegeräten ablesen. Allerdings ist die eindeutige Zuordnung einer Meßmarke (z. B. Kante) schwierig. Typische Meßgenauigkeit: 1 μm .



Zur präzisen Vermessung von Zahnrädern, Schnitt-, Präge-, Spritzgußwerkzeugen u. ä. wird in der Werkstatt häufig der **Profilprojektor** (Abb. 9.11) eingesetzt.

Abb. 9.11: Funktion Profilprojektor

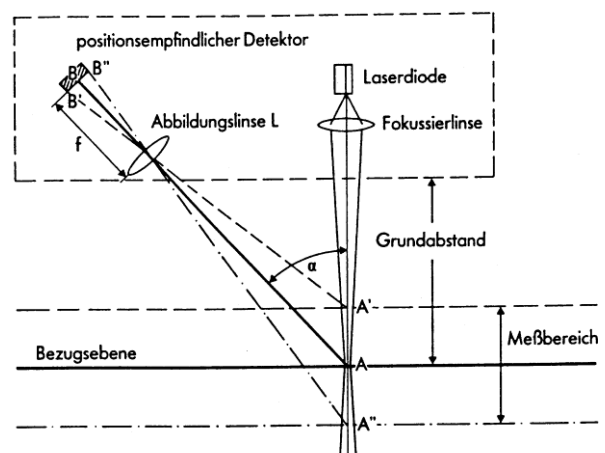
Hierbei wird durch ein korrigiertes Linsensystem (Verzeichnungen!) das vergrößerte Abbild eines Gegenstands auf eine Mattscheibe (typischer $\varnothing = 600 \text{ mm}$)

projiziert. Auch hier ist der Strahlengang telezentrisch. Die Scharfeinstellung erfolgt ausschließlich durch vertikale Verschiebung des Objekts. Die Objektive sind auswechselbar. 10x, 20x, 50x, so daß das übersehbare Objektfeld 60, 30 und 12 mm beträgt. Die Vermessung der Objekte geschieht meist durch Lateralverschiebung. Typische Meßgenauigkeit: 1 μm .

Triangulation (Höhenvermessung)

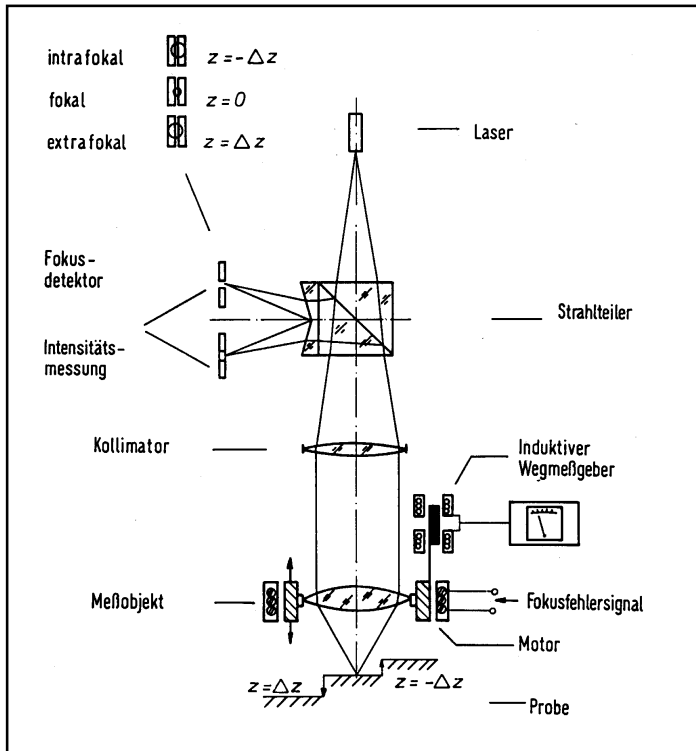
Ein Verfahren zur Abstandsbestimmung und zur Vermessung eines Höhenprofils ist in Abb. 9.12 vorgestellt. Die Triangulation ist ein Abstandsmessverfahren, bei dem eine mit einem Laser beleuchtete Fläche auf einen positionsempfindlichen Detektor abgebildet wird. Hierbei muß allerdings die Oberfläche genügend gut streuen, damit überhaupt Licht zum Detektor gelangt. Meßgenauigkeit: etwa 20 μm .

Abb. 9.11: Prinzip Triangulation



Autofokussystem

Die in neuerer Zeit eingesetzten Autofokussysteme erlauben sowohl eine Vermessung der Lateral- als auch Höhenstruktur. Hierbei werden (vgl. Abb. 9.12) das Meßobjekt und ein optisches System relativ zueinander zeilenweise lateral bewegt.



Eine vertikal bewegliche Objektivlinse stellt sich so ein, daß der jeweils betrachtete Punkt auf der Objektoberfläche scharf abgebildet wird (Autofokusprinzip). Die **Vertikalbewegung** der Linse gibt dann das Höhenprofil als Funktion lateraler Koordinaten wieder. Durch Abfahren mehrerer Zeilen lassen sich so Höhenprofile von Flächen vermessen. Dieses Höhenprofil lässt sich auf einem Bildschirm darstellen auswerten. Obwohl die endliche Ausdehnung des Laserflecks dazu führt, daß das Höhenprofil einer absolut senkrechten Kante nicht scharf erscheint, lassen sich Algorithmen angeben, die eine reproduzierbare Auswertung erlauben, so daß die Meßgenauigkeit lateral und vertikal bei etwa $0,5 \mu\text{m}$ liegt.

Abb. 9.12: Prinzip Autofokusmessung

Fernrohr

Es ist Aufgabe eines Fernrohrs, die Winkelgröße weit entfernter Gegenstände zu vergrößern. Dies ist z. B. anhand des Strahlengangs durch das Kepler'sche Fernrohr zu sehen (Abb. 9.13). Das Bild des unendlich entfernten Gegenstands wird durch das Objektiv in den Brennpunkt abgebildet. Dort befindet sich auch der Brennpunkt des Okulars. Für den Winkel des Hauptstrahls zur optischen Achse u_{ein} gilt mit der Zwischenbildgröße B' und der Brennweite des Objektivs f_{Ob} : $u_{\text{ein}} = B'/f_{\text{Ob}}$. Der Winkel des austretenden Strahls ist: $u_{\text{aus}} = B'/f_{\text{Ok}}$.

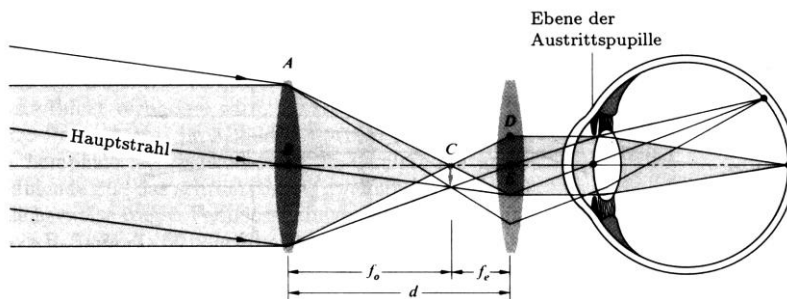


Abb. 9.13: Keplersches Fernrohr

Die Winkelvergrößerung des Fernrohrs ist somit
 $\Gamma = u_{\text{aus}} / u_{\text{ein}} = f_{\text{Ob}} / f_{\text{Ok}}$.

Beim Kepler'schen oder astronomischen Fernrohr ist das Bild umgedreht. Für Anwendungen auf der Erde wird zwischen Objektiv und Okular ein Umkehrsystem aus Linsen eingefügt (vgl. Abb. 9.14). Damit eine genügend gute Auflösung erreicht werden kann, sind die Linsen als Achromaten aufgebaut und auch bezüglich monochromatischer Fehler korrigiert.

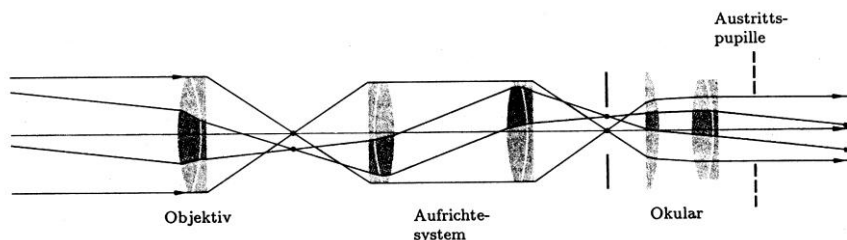


Abb. 9.14: Fernrohr mit Umkehrsystem

Fluchtungsmessung

Zur Überprüfung des Quer- und Höhenversatzes von Werkzeugmaschinenführungen setzt man Fernrohre mit einer Strichplatte in der Zwischenbildebene entsprechend Abb. 9.15 ein. Das Fluchtfernrohr wird auf eine Zielmarke eingestellt, wobei Zielmarke und Strichplatte durch das Okular vergrößert betrachtet werden. Bei der Bewegung auf einer Achse senkrecht zur Zielmarke (y in Abb. 9.15) wandert das Bild der Zielmarke bei Fluchtungsabweichungen lateral aus. Eine Verkipfung der Zielmarke um ihren Mittelpunkt ändert die Lage des Zielmarkenbilds nicht.

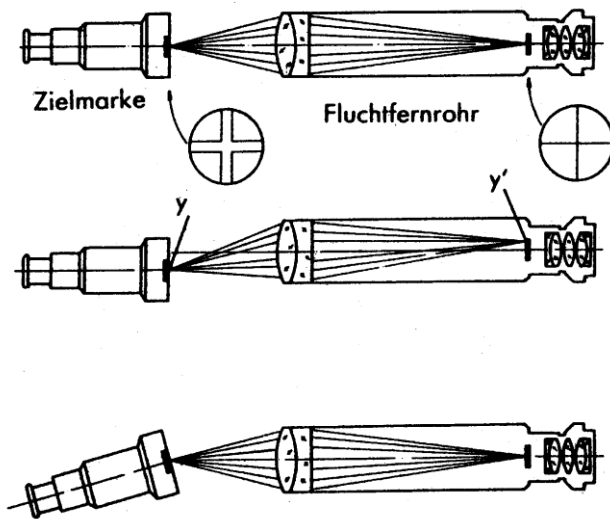


Abb. 9.15: Fluchtungsmessung

Autokollimation

Mit dem Autokollimationsfernrohr werden Richtungsabweichungen gemessen. Das Bild einer Strichplatte in der Zwischenbildebene des Fernrohrs wird mit Hilfe eines Spiegels auf sich selbst abgebildet. Liegt der Spiegel exakt senkrecht zur optischen Achse, wird das Bild in sich zurückgeworfen. (Abb. 9.16). Eine Änderung des Winkels zwischen optischer Achse und Spiegel bewirkt eine Auswanderung des reflektierten Bilds.

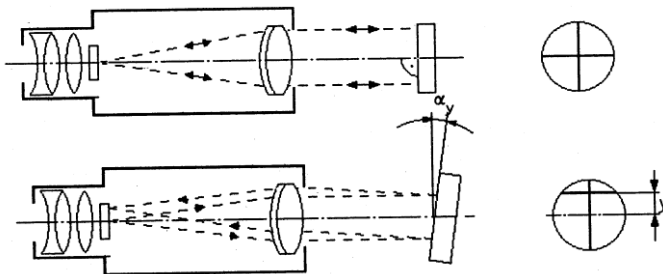


Abb. 9.16: Autokollimation

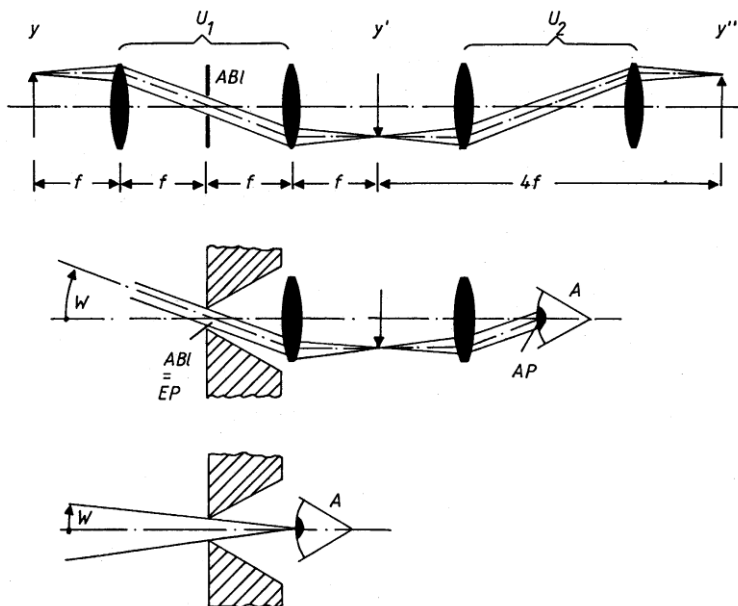


Abb. 9.17: Endoskopoptiken

Endoskop

Endoskope nutzt man zur Bildleitung durch dünne Öffnungen (Verbrennungsmotoren, Turbinen, medizinische Anwendungen). Hierzu werden 1:1 Abbildungen mittels jeweils 2 Sammellinsen eingesetzt (vgl. Abb. 9.17 oben). Meist kommen Stablinsen zur Anwendung, die bei gleicher Anzahl der Linsen eine Endoskopverlängerung ermöglichen. Durch gute Entspiegelung der Linsen gelingt die Abbildung über weite Strecken. Ablenkprismen an den Stellen der Zwischenbilder erlauben Knickbewegungen.

Endoskope ermöglichen eine Beobachtung durchs „Schlüsselloch“ mit großem Sehwinkel, wie sie bloßem Auge nicht möglich ist.

11. Literatur

- [1] Bergmann Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 3, Optik, Walter de Gruyter (1993)
- [2] E. Hecht, Optik, Addison-Wesley (1994)
- [3] H. Naumann, G. Schröder, Bauelemente der Optik, Carl Hanser Verlag (1983)
- [4] F. Hodam, Technische Optik, VEB Verlag Technik Berlin (1965)
- [5] Pedrotti, Optik: eine Einführung, Prentice Hall (1996)
- [6] Saleh, Teich, Fundamentals of Photonics, J. Wiley & Sons (1991)